

微积分之屠龙宝刀

一笑傲极限、连续、导数、积分法



[美]C·亚当斯 J·哈斯 A·汤普森／著 张菽／译

湖南科学技术出版社

HOW TO ACE CALCULUS: THE STREETWISE GUIDE

图书在版编目(CIP)数据

微积分之屠龙宝刀/(美)亚当斯,(美)哈斯,
(美)汤普森著;张菽译.—长沙:湖南科学技术出版社,2004.5
ISBN 7—5357—3966—0

Ⅰ.微… Ⅱ.①亚…②哈…③汤…④张… Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 048540 号

科学天下·新观念教学

微积分之屠龙宝刀

笑傲极限、连续、导数、积分法

著　　者:[美] C·亚当斯　J·哈斯　A·汤普森
译　　者:张　菽
责任编辑:孙桂均　李　媛
出版发行:湖南科学技术出版社
社　　址:长沙市湘雅路 276 号
　　　　　http://www.hnstp.com
邮购联系:本社直销科 0731—4375808
印　　刷:长沙政院印刷厂
　　　　　(印装质量问题请直接与本厂联系)
厂　　址:长沙市芙蓉中路 661 号
邮　　编:410074
出版日期:2004 年 5 月第 1 版第 1 次
开　　本:787mm×1092mm　1/18
印　　张:13.667
字　　数:238000
书　　号:ISBN 7—5357—3966—0/O·226
定　　价:24.80 元

作者简介

亚当斯（Colin Adams）

美国威廉斯学院（Williams College）数学教授，曾荣获1998年美国数学协会杰出教学奖（MAA Distinguished Teaching Award）；另著有《The Knot Book》.

哈斯（Joel Hass）

美国加州大学（戴维斯分校）数学教授，曾获美国国家科学基金会（NSF）及史隆基金会（Sloan Foundation）研究奖.

汤普森（Abigail Thompson）

美国加州大学（戴维斯分校）数学教授，曾获美国国家科学基金会（NSF）及史隆基金会（Sloan Foundation）研究奖.



谨以此书

献给

所有对未来生涯规划具有鸿鹄之志，
却又担心会撞上微积分的嵯峨山崖
而折断翅膀的
学生们

第1章

引言

如果你正打算要读这篇序文，那么这本书很可能不适合你．为什么呢？因为我们预期这本书的读者，应该是那些一天到晚忙于应付微积分的学生，他们压根儿不会有空来读这种咬文嚼字、考试又一定不考的序文和导言．当然，也有可能是你还没有买下这本书，正站在书店里这边瞧瞧、那边瞧瞧，考虑到底要不要买回去——如果情形果真如此，那就让我们简单告诉你，这本书究竟在讲什么．

如果你想探知内行人所知道的秘诀与窍门，使你的大一上学期微积分修得轻松愉快，那么这本书必然是你所需要的；如果你想在快乐中学到许多妙不可言的数学知识，这本书也正好是你要找的．甚至当你只是想拿本书在手上做个样子，让看见你的人以为你很有数学文化气息，正徜徉、沉醉在知识的波涛里，这本书也能帮你圆满完成任务．

曾几何时，你坐在教室里听讲却完全听不懂，而面露窘态．可能是因为你的注意力，在一个节骨眼地方，被脑中突然闪过的其他念头支开或打断；也可能是因为任课老师在讲解一些基本概念时，一时高兴过头，不经意地扯到一些深奥理论去了，搞得你下了课后一头雾水，只好求助于才思敏捷的同窗好友，还得请他喝一杯咖啡当做贿赂：“刚才那堂课上，教授讲了些啥玩意儿呀？”结果，你那位朋友只用了短短 5 分钟向你解释，居然就让你恍然大悟．“什么！就这么简单吗？”你嘴里这么说着，心里可是直嘀咕：“为什么老师不一开始就

如此解释呢?”从此，你巴不得总有这位同窗在一旁，把课堂上讲过的所有内容都向你解说一番.

你有这么一位益友，可真是前生修来的福气，不是每个人都这么好命的.这本书的目的就是要取代你那位朋友. 本书提供了微积分里面各种关键论题的“非正式”说明，并尽可能跳过正式教科书中那些没啥用途的技术性细节与一大堆啰唆的文字，而是着重于概念的阐释与澄清. 本书并不是要取代微积分教科书，而是希望帮助读者更容易了解教科书中的微言大义.

只要你的观点正确，方法无误，学习微积分不但是拓展心智的难得经历，也是叫人心旷神怡的乐事. 这本书将告诉你：微积分该怎么学，如何找最好的老师，该学些什么，以及考试时可能会考哪些部分. 这些内容可都是我们当年在当大学生、必须修微积分时所企盼而不可得的呢!

好啦，你已经磨蹭得够久了，何不拿着这本书到收银台，掏腰包付点小钱把它买下来，然后咱们继续再聊?

第2章

你的任课老师到底如何

2.1 选择你的任课老师

在这儿我们要简单介绍一下数学家，包括他们的尊卑层级，以及各个阶层的独特特征.

在选择你的任课老师之前，务必仔细研读此节.

了解数学家，其实就像赏鸟. 赏鸟专家为了要能够在大庭广众之中，很有信心的大声宣称："看！那种黄肚皮的鸟是美洲啄木鸟！"他得事先对这种鸟的特征有足够的认识才行.

能否选到一位最佳任课老师，关系实在重大，若是选得理想的话，你的微积分修课经历将成为一连串的喜悦记忆；若选得不理想，到后来你很可能会故意挑微积分的上课时间去看牙医，此乃两"痛"相权取其轻也.

通常只要看看老师的办公室门，你就能得到相当多的有关信息. 一般而言，老师的办公室门上都会挂着或贴着名牌，主要作用是告知其正式头衔. 这头衔还挺复杂，有以下诸多可能：

A. 终身职的固定教师（门牌上写的是某某教授或副教授）．有“终身职”的教师，是指无论他如何鬼混、如何不称职，学校都不能主动炒他们鱿鱼．副教授者，资格上比教授矮了一级；副教授之所以为副教授，有时候是因为他们年纪较轻，教书的资历较浅，有时候则是因为其他难以想象的原因，让他无法晋升（诸如他在院长公寓烟囱里面躲猫猫的时候，不巧叫院长逮个正着）．

B. 非终身职的固定教师（门牌上写的是某某助理教授）．这号人物可以随时被校方请走路，不过当他们被学校辞退的时候，原因多半不会跟他们教导微积分的能力扯上关系！在欧洲，助理教授实际上就是助理，他们的工作包括按时修剪教授家里的草皮，替教授提公文包，以及代替教授讲课．而在美国，他们的地位就稍微高些，头衔里的“助教”两字也只是显示他们的教书生涯刚开始，处于尚未取得终身职位的阶段．

C. 客座教师（门牌上写的是某某客座教授或客座助理教授）．“客座”两字是指学校对他们的礼遇有时间上的限制，一年或两年约满之后，他们就得乖乖自动离开，至于离开之后有没有其他路子，学校就不过问啦！

D. 临时教师（门牌上写的头衔是讲师、指导老师或是兼任教授）．有些学院聘了一些临时教师，目的无它，就是专门请他们来教课．这或许意味着这些临时教师可能对教学比较尽心尽力．

E. 研究生（门牌上只写姓名，没有头衔，不过有时候也可能胡乱弄个一看就知道是假的头衔，诸如兼职指导教师之类的）．

F. 门上看不见任何门牌．这是非常不妙的现象，可能有几种原因：其一是表示这位老师太缺乏组织能力，居然连门牌这么重要的东西都给漏掉了；其二更是严重，表示这位老师以前的学生，为了报复泄恨，不断前来把他的办公室门牌扯下来丢掉．当然也可能是他有某种顾虑，不愿意让他以前的学生知道他的办公室在哪儿；这种现象值得花点时间深究一番．

G. 连门都没有．此乃极端危险的信号！很可能表示学校当局认为他根本没有资格拥有一间办公室（果真如此，你下了课之后要怎么去找他问问题呀?），当然也有可能是你找错了大楼！

上述类别中，属于A、B、C、D四类的几乎都有博士学位．

在学校的选课课程目录内，所有具固定职位的教师的名字与头衔都会列出

来，以备学生查阅．在规模庞大的大学里，有固定职位的通常是一些做高深研究的教师，或者是那些长期待在数学系内，操控着系里行政机构的老家伙．有时候，系里最好的老师就在这群人里面，不过最差劲的老师也混杂在当中．这些老师包办了系里所有高年级的课程，偶尔也教教微积分这种入门课；他们对于教微积分这项工作看法不一，有的人认为这是个摆脱不掉、必须忍受的义务及负担，另外一些人则沉浸在传授微积分的乐趣中．

在许多规模较小的学校里，校方并不要求教师做许多研究，因此他们的重点放在教书上面．所以你会发现，在这些学校里，有许多教师在改进教学方面花很多时间和精力，这有时也意味着，他们可能会是比较好的微积分老师．不过凡事有利也有弊，由于这类学校的教师不做研究，他们的教书担子通常就比那些在研究型大学里任职的教师沉重了一到两倍，所以，虽然他们不必因为搞研究而分心（诸如千辛万苦地证明“双曲三维流形的凸锥是紧的”这类问题），但是往往必须在一学期里同时教四个班的微积分课，面对数百学生的需求，即使有心专注教学，又谈何容易？

在区别C类（即客座教师）跟D类（临时教师）时，所牵涉到的细节还相当细微，不能一概而论．有些客座教师在别处有固定职位，来这儿只是适逢他每七年一次的休假年或者是其他长假，来此与老朋友叙叙旧，或是在很棒的冲浪景点（恰好在你的学校附近）尽情享受一番．他的假期一完就走人，至于学生在学期末对任课老师的评分是优是劣，他压根儿没放在心上．不过，如果这些老师原来任职的学校就标榜教学为第一要务，那么你也可能会碰上顶尖的好老师．

至于其他的客座教师，可能是刚拿到博士学位的新科教师，你成了他的开门弟子．他们通常挂着诸如“客座助理教授”或其他带着“博士后”字眼的头衔．他们的当务之急并非教学成绩，而是试图搞出一点可以发表的研究成果，以寻找明年的出路．但他们也不可能完全放弃教学，因为一旦学生认定他们是坏老师的话，肯定以后不会有学校聘他们，但是由于缺乏经验，他们的教学能力因人而异，好坏差距极大．

讲师跟临时讲师通常是逐年一聘，他们的主要任务就是教课．他们的教学方法可能决定明年是否能续聘，而学生在学期末给老师打的分数，很可能影响

到他们明年的饭碗. 所以对他们来说，巴结学生、让学生开心是极端重要的. 如果一位讲师在学校里待了超过一年，却仍然还没有混到一个带“教授”字眼的头衔，这表示他仍然是留校察看的临时教师. 这种教师一般只能教教微积分和一些微积分预备课程，若是他们在此之前教过同样的课程好一阵子，那么一般说来他们都会教得比较好，如果仍然教得相当糟糕，他准是系主任的小舅子.

硕士班或博士班的研究生有可能是非常好的讲师，他们的共同弱点一般是经验不足. 他们教学能力的优劣，完全难以捉摸，有的相当顶尖，有的极端蹩脚. 不过也有个问题，那就是他们大多刚念完大学. 对初等微积分还记忆犹新，不太容易玩花样蒙混过关. 他们之中亦不乏年纪较长的，你不难从他们花白纠结的一头乱发、含糊的口气，以及邋遢的穿着，一眼认出这类人物.

对于绝大多数的研究生讲师，你不大可能从旁探听到他们以往的表现，遇到他们的话，最好的策略就是去听他讲一两堂课，如果发现讲得很糟，就应该要当机立断，迅速撤离.

通常，你可从办公室的空间大小看出一位教师的学术地位. 如果其他征象都没法给你足够多可靠的信息，不妨一探他的办公室. 办法是：进去估量一下办公室内的地板面积，然后把估计的数值除以门上具名的人数，再加上办公室所在楼层数目，如果没有窗子就得乘以－1. 最后得到的值愈大，表示你的任课老师在系里地位愈高.

当然，以上的归纳分析并不很准确可靠，例外可说是屡见不鲜. 我们自己就曾遇过既认真又杰出的客座教授，也碰到过为学生鞠躬尽瘁的尽职教师. 那么我们该怎样办才好呢？幸好有个更为可靠而且相当简单的方法，可以告诉我们在可供选择的范围内，谁是最高水平的教师.

内行机密：想知道谁是最好的任课老师啊？开口问呀！

其实系里上上下下，每个人心里都明白究竟谁是个好老师. 你可以去拜访系里的两三位老师，向他们打听一番. 不过得注意一点，你最好问那些年纪轻一些的老师，因为他们涉世未深，故意诓你的几率不大. 另外，系办公室的秘

书也知道哪几位老师教得最好，等着选课的学生队伍排得最长，而哪几位老师会让许多学生半途而废.

内行机密：想知道谁是最好的任课老师吗？多听几个老师讲课，然后选择你认为最好的那一位！

在规模较大的大学里，同一门课你大概可以在5～10位教师里精挑细选.规模较小的学校也许没有这么多选择，教学水平可能比较整齐．不管学校大小，如果你多问问，应该可以找出两三位优秀的教师，然后你再去一一试听，选出你的理想老师来.

如果没得选择也就罢了，既然可以选，当然就应该选出最好的．其实这个选择一点也不难，通常只要听了第一堂课，你就会知道谁能引起你的注意，而谁会让你听得哈欠连天．你的筛选标准要订得很高，千万不要跟某些学子犯同样的错误：误以为听不懂是自己的错.

内行机密：若上课之前你做过预习，但讲课的内容你却完全无法听懂，过错极可能在任课老师，而不在你！

如果第一天上课就有超过$\frac{1}{10}$的学生睡着了，那是一个很糟糕的信号；如果上课第一天就分发下来一份印得很清楚的课程大纲，或者任课老师帮同学排定了许多课外的办公时间，那可是好的信号．如果你在课堂里听了老半天，还搞不清这节课上的是法文还是数学，那是个糟糕的信号；如果任课老师指定《奇说趣论微积分》这本书为必备参考书，那是个好的信号——而且是极其好的信号！

许多学校不喜欢让学生试听，因为这样会大幅增加学校行政人员的工作量，而且到头来会使得班级大小难以控制．有些学校的行政人员甚至希望你缴完学费后便自动消失，最好不要再去找他们的麻烦．切记！千万别在乎他们高兴与不高兴，你缴了学费，就有权利要求他们为你做点事！

如果你现在是个高中生，而且正在修微积分，那么以上所述的选良师的高招，绝大部分没有用武之地，原因是你根本毫无选择．在这种情况下，你就是踢桌子、摔板凳，都没啥用，所以你只能祈求老天爷保佑自己不要遇到太离谱

的糟糕老师.

2.2　对任课老师该有什么要求

好啦，你现在好歹已经有了任课老师，对他（她）的职位也有些初步的了解，那么咱们就再更仔细瞧瞧他（她）算不算是理想的微积分老师. 以下举几个你可能料想不到的实际例子.

名数学家故事之一

出生在匈牙利的冯·诺伊曼（John Von Neumann，1903～1957），20 世纪 30 年代移居美国. 他利用工作闲暇之余，提出了计算机内存储程序的概念，可算是计算机理论的开山祖师爷. 此外，他的为人处世也有点不太平凡.

有一次，他讲完一堂微积分课，有位学生跑来问他问题：“冯·诺伊曼教授，黑板上最后那个问题，我不了解你是怎么得到答案的.” 冯·诺伊曼转过头盯着黑板上那个问题，看了大约一分钟，然后说：“e^x”. 这位困惑的学生以为他没有听明白，于是说：“我知道那是正确答案，冯·诺伊曼教授，我只是不懂它是怎么求出来的.” 结果冯·诺伊曼盯住学生看了一分钟，然后移开视线，又重复一遍说：“e^x”. 这名学生开始失去耐性了：“但你并没有告诉我你究竟是怎么得到答案的!” 冯·诺伊曼把头转向他，一脸寒霜地说：“小伙子，你到底要我怎么办呀？我不是已经用两种不同的方式告诉你了吗?”

启示：有的时候，教授们其实已经不大记得他们自己以前在当学生，还在学习微积分时的困苦情形，由于他们年复一年、一遍又一遍讲授同样的教材，他们根本不能理解，为什么学生仍然不懂.

名数学家故事之二

维纳（Norbert Wiener，1894～1964）大约是 20 世纪前半叶世界上最伟大的一位美国数学家. 他过人的才智为同行所钦佩，而他也同样因为心不在焉而出名.

在麻省理工学院（MIT）执掌教鞭数年之后，维纳一家人搬到一栋比较大

的房子里．他的太太深知他的老毛病，晓得他可能会记不住新家的地址，以至于下班之后回不了家，所以她特地把地址写在一张纸上，让他放在外衣的口袋里．不过那天在吃中饭的时候，他突然想到一个非常好的数学点子，急切之间把字条给掏了出来，在上面做了一些计算式子．做着做着，却又突然发现了破绽，才知道这点子并不怎么样，一气之下就把那张纸揉成一团丢进了字纸篓．等到一天终于忙完，到了该回家的时候，他才想到自己把写有地址的字条给丢掉啦！这下子他怎么想也想不起新家在哪儿．

不过，他那大数学家的头脑也不是徒有虚名，一转念便想到了办法：回到原来住处，等在屋前．因为若是他逾时未抵家门，他老婆一定知道他是迷路了，所以会到旧屋那儿去接他．很不幸，当他抵达旧家时，并没瞧见他老婆的倩影，倒是发现一位小姑娘站在屋前，于是他趋前问她："对不起，小妹妹，你知不知道住在这儿的人搬到什么地方去啦？"不料，这个小姑娘却回答说："老爸，别担心，妈妈叫我来带你回家．"

附言：最近有一家数学通讯社循线找到了维纳的女儿，向她求证这项传闻，她断然否认当年她老爸糊涂到连亲生女儿都认不出来，不过却坦承他的确不知道回家之路．

启示一：如果学期结束的时候，你的任课教授仍然没有搞清楚你的大名，请不要太见怪．

启示二：你应该庆幸你的父母不是学数学的．万一是的话，也用不着唉声叹气，你可以随时准备向他们自我介绍一番，然后缠住他们，要求他们帮助你搞懂微积分．

名数学家故事之三

希尔伯特（David Hilbert，1862～1943）是活跃在20世纪初的伟大德国数学家．他的一位学生买了一部汽车，后来不幸死于一场车祸．在葬礼上，死者家属请希尔伯特老师说几句话，于是他说："小克劳斯是我的学生当中最优秀的，他生前在数学方面，具有不同凡响的天分．他对数学问题的兴趣非常广泛，诸如……"他暂停了一会儿，然后说："考虑单位区间上一组可微函数，然后取它们的闭包……"

启示一：上课时尽量坐在教室门口附近，要离开比较容易．

启示二：有些数学家可能跟现实生活有点脱节，如果你的任课教授属于这一类，倒也无伤大雅，试着从好的一面来看：一学期下来，你保准能收集到一大箩筐的趣事、笑话呢！

2.3　如何对待任课老师

以下是几个基本礼仪，教你如何跟任课老师成功互动.

1. 千万要记牢任课老师的大名. 许多数学老师都不能想象，在学生的生命中会有比他们更重要的“贵人”. 不管你怎么想，毕竟关系搞好了，占便宜的还是你自己.

2. 尽早决定要用什么头衔称呼你的任课老师. 这个礼仪问题看似复杂，其实非常容易. 你大概听过“礼多人不怪”这句话吧？诀窍就在不吝于多加些恭维的字眼. 假设你的任课老师姓郭，称呼他一声郭博士准没错，虽然他的薪资一辈子都不会超过他班上医学院学生将来的收入. 如果郭教授是位女性，那么更需要称呼她为郭博士. 故此当女教授们听到男研究生谄媚地称她们为郭小姐或郭太太时，则感到无名的烦恼. 头衔上尽量“大方送”. 哪怕说的是假的，也几乎没有因可用“博士”称呼而冒犯了任何一位任课老师. 虽然这种称呼对尚未取得博士学位的研究生很不恰当，但他们仍会被这种称呼而激动.

3. 避免粗鲁的言行，随时保持礼貌. 在向授课老师问问题的时候，可以坚持不懈，但绝不可粗鲁无礼. 千万记住，决定你的成绩的人是任课老师. 即使最最理想主义的老师，号称绝对不让他的个人好恶影响到学生的成绩，仍然不可避免地会碰到是否要让你及格，或是帮你加分的情况. 这时，他的意识会说：“这个学生的期末成绩比期中成绩稍微差了一些，但是期末考占的比重较大，照说我应该打出较低的成绩.”但是他的下意识却在喊：“好呀！我可得借此机会把你这个目无尊长的下流坯钉到墙头上.”打数学分数虽然不像打“圣经诠释传统中的反偶像现代性”这类课程的成绩那么见仁见智，中间还是有一点活动空间. 所以，请善待你的师长.

第3章

轻松拿高分的十大通则

1. 把这本书买下来. 如果你手上这本不是你的, 赶紧去买一本, 放在床头, 以备随时翻阅. 不妨再多买几本, 放在厨房、厕所这些你经常出入的地方.

2. 选择最适合你的教师.

3. 用心听讲. 这件事说来容易, 做起来却相当困难. 有些教授已经积习难改, 他们的教法使你的注意力涣散、思想麻痹. 要是你没有钢铁般的意志, 绝对难以阻挡他们的绵绵攻势. 对付他们的办法是要勇于分辨——如果有选择的机会, 就选一位最适合你的教授. 如果学校不让你选择, 就在校园附近找找有什么地方可以买到效力最强的咖啡; 原则上, 学校附近都应该找得到. 如果居然连买咖啡都如此困难, 那么你也用不着修微积分了, 不如改行开咖啡屋吧, 你会大赚一票的.

有个很有效的方法, 能强迫自己集中注意力, 那就是上课时坐在第一排. 根据以往的经验, 拿高分的学生只有两类:

* 坐在第一排的学生, 原因是坐在第一排可以让人更专心.

* 坐在教室最后面, 从来不注意听讲的学生. 这些家伙仗着高中时修过微积分, 现在只想轻松捞一个高分. 他们绝不会愿意花钱买这本书, 所以跟咱

们无缘．他们哪会料到，读过这本书的同学将会聚集在全班成绩曲线的前端，把他们痛宰一顿（要是还能拿七十几分，算他们走运）．

4．老老实实的把习题全都做一遍．虽然大学课程的重点集中在课堂里，但真正的学习却发生在课堂之外，在寝室里，或在图书馆内，在你做习题的时候．道理极其简单，如果你搞清楚了怎么做习题，那么你自然也领悟了如何解答考卷上的问题．

这儿有几个做习题的简单步骤：

* 看清楚老师交代的是什么样的习题．

* 从教科书里找出看起来类似的例题．

* 试着用例题里的解题方式依样画葫芦，你会发现绝大多数的习题，都会迎刃而解．

当你按照上述步骤，反复做过几题之后，自然而然就会渐渐不再需要参考例题，而能独立完成解题的工作了．数学这玩意儿，说穿了不过就是如此．

5．找人帮助．当你卡在问题里面动弹不得的时候，千万不要：

* 用脑袋撞墙．

* 以为两大杯啤酒下肚就可以解决问题．

* 一气之下断然放弃学生生涯，改行去街上卖米粉．

相反的，你应该冷静下来，去找人帮忙．找谁呢？下列名单是按照重要性做递减的排序．

* 同窗的才子型人物．切记要把自尊摆在一旁，如果死要面子，到头来你还是跟高分无缘．只要你愿意不耻下问，一定有高人能够解释给你听．不过必须记住，不要直接问答案，而是要问过程，因为光是知道答案，对将来应付考试没啥用途，考卷上的问题稍微一改，答案当然就不一样了．还有就是要设法跟这种人建立起友谊，一种施与受的关系，这对双方皆有好处，因为世界上最好的学习方式，就是试着讲解给旁人听．

* 不久前刚修过同一门课的人（而且修得一级棒）．重点是要在“不久前”修过，因为如果已经隔了一段时间，你可能需要花更多时间唤起他模糊的记忆，而得不到什么帮助．

* 助教．一般说来，助教在教学上依然是新手，因而非常热衷于指导学生，一次耽误他几个小时都很少怨言．他们乐于握有权力，最巴望有学生去问他问题，借以陶醉在“他比你懂得多”的事实之中．不妨善加利用．

* 教授．缺点是，要找他们通常不会很容易，他们在办公室的时间一般不多，而且多半不会太考虑学生的方便．所以若要去找教授，事先最好准备妥当．可以用便条纸，写上想问的问题，然后贴在缴交的习题或是课堂笔记本中，见了教授之后，一个接一个的提出问题．教授看到你那么有组织能力，又对课堂内容那么注意，印象一定非常深刻，很可能在学期结束时帮你加分呢．当然，如果教授知道你的大名，就更有帮助了．

大多数的教授都极乐意在已经排定的办公室时间以外，与学生另约时间，当然也不免会有例外．话说有位学生，下课后快步绕到女教授面前把她拦下来，说了一堆借口，希望跟教授另外时间，帮他解答几处不明了的地方．教授拿出她的记事本，看了看之后对学生说：“我在两个半月之后有点空闲，也就是 3 月 24 日清晨 6 点 15 分．”这名学生听了之后倒抽一口气说：“你只有在那个时间才有空吗?”教授说：“不错．有什么问题吗?”学生说：“那倒没有，只是我正好跟助教约好同一个时间，要去找他．”

* 电子邮件．利用电子邮件，是从任课教师或助教那儿获得答案的最简易最快速的办法．奇怪的是，几乎没有学生想到用电子邮件跟老师打交道．这种通讯方式特别适合简短的询问，诸如“明天的课是否又要取消?”以及“我可以跟您约星期二吗?”教授们随时会查看信箱，而且大多数都很勤于回信．用电子邮件还有个好处，那就是你发信的时间完全不需讲究，白天晚上皆可．与凌晨三点钟在家里接到你的电话比起来，他们宁愿收到电子邮件!

* 上网．全球互联网上有许多微积分网站及讨论区，上去之后，你可以找到各式各样问题的答案．如果你知道如何上网，马上行动；如果你还不会上网，赶紧找班上那个显然很少晒太阳的同学，拜托他（她）教你如何上网．

6．熟悉各个例题．老师在教微积分时，通常都是塞给学生一堆法则（有时会分门别类成一系列的定理跟引理），偶尔举一两个例题来说明．千万要注意这些例题！你可能会以为那些例子不过是任课老师信手拈来．其实，这些范例都是老师精心挑选的，所以你应该特别记牢，因为期末考的题目可能跟这些

例题差不到哪去．数学教授会把他的同一套考试题目拿来重复使用，就跟谐星总是重复说同样的笑话一样．

7．想办法弄到过去的考题．有些人食古不化，认为用过去的考题当参考资料有偷鸡摸狗之嫌，殊不知过去的考题早已成为堂而皇之的公开资料．在许多大学里，你可以从图书馆或是系办公室要到过去的考题，如果你在这两个地方碰了钉子，那就想法子找以前修过课的学长，或直接拜访任课老师，开门见山向他要份过去的考题．反正是要使尽浑身解数，不达目的誓不罢休．拿到过去的考题后，尽快做个数遍，而且要彻底弄懂．

另一个有用的例题来源，是其他的微积分教科书．在学校附近的二手书店里，你可以买到两三年前的二手教科书，价格一般都不贵，这些虽然是旧书，里面的数学 5 年后（甚至 50 年后）都不会过时——许多老师就专门从其他教科书里找考题呢！

8．用功．许多学生一听到“用功”两字就头痛，但实际上，学生终归免不了要用功．这本书只能告诉你最有效的学习方法，让你学习得很快乐——而不是教你如何不读书就拿高分．如果你读完这本书，碰到微积分仍然手足无措的话，建议你改行去搞政治，或其他不会碰到数学或更高层次思维的相似领域．

9．额外做习题．如果你运气好，碰到一位异乎寻常的勤快老师，给了你们一大堆额外习题，那么，别的事都可以等一等，请千万要自觉地把这些习题做一做！为什么呢？因为你班上的其他同学几乎不会有人做！绝大部分同学对额外习题都有一个错误的观念，他们以为额外习题可做可不做，一点也不重要．但情形恰恰相反，额外习题的分数可能会加到学期总成绩里面．如果班上除了你之外没有人做这些习题，你的成绩自然高出所有人一大截，结果，你得了高分，而别人可能迟早要挨家挨户推销杂志，赚点小钱来糊口．

10．躲开阴险行为．几乎毫无例外，考试靠作弊并不会得到好成绩．你也许可以靠作弊，骗对了一题两题，但是数学这玩意儿，绝大部分的知识是累积

下来的，所以一开始就得按部就班，面对现实！如果你先前是靠作弊，你累积到的知识就是从隔壁同学考卷上瞄来的一个有关“极限”问题的答案，这绝对无法帮助你进一步了解“导数”的观念. 考试作弊的风险高，却毫无报酬.

（我们知道你此刻正在想什么，准是那句老话：“诚实为上.”似乎许多教授每学期都被要求得这样提醒学生至少一次，就好像在实践他们当初成为教授时所签署的誓约；据说其中有一条是，每位教授在下课时，必须为下一位教授把黑板擦干净. 但事实上誓约里根本没有这些要求. 不过话又得说回来，考试作弊的确只有可能让你身败名裂，对你绝不会有丝毫帮助. 至于擦黑板嘛，那得看下一位教授他们是否喜欢！）

第4章 好问题和坏问题

4.1　为什么要问问题

什么？要我问问题？没门！冒的险太大啦．如果我不小心问了个笨问题，让人看见我的蠢相，我的形象岂不就毁了？万一教授大发雷霆，指着我吼："你这笨蛋，怎么连这么愚蠢的问题也问得出来？现在就给我滚出教室去，顺便把你的不及格的成绩也带走．"那该怎么办？

绝大多数的学生都有类似的想法，巧合的是，学期结束时，这绝大多数的学生得到的成绩也都不到 90 分．其实，问问题从来就没让学生惹过任何麻烦，相反的，问问题的学生一般都会得到许多好处．教授打心眼里就喜爱学生上课时问问题，因为有人问问题，才显得整班学生正在全神贯注于老师的讲课，证明师生配合密切、有意见交流、有互动，当然就能达到预期的教学目的，一切既理想又圆满！

学生喜欢看到别的同学问问题．为什么呢？第一，多数学生在上课时不可能真的三心二意，这时刻最好有同学提出问题，让他们可以从容赶上老师的进度．第二，他们可以听听哪些地方让其他同学头痛．而最重要的一点则是，大家可以趁机瞧瞧，问问题的同学今天穿什么．

在课堂上提出问题，可以达到以下几种目的：

* 拿来抵免课堂参与的评分．老师有时候会把学生的上课参与度，列为期末考核的一环．若是这种情形，你就必须事先准备一大堆合适的问题，适时提出来，这样才能赢得你的参与分数．否则，教授可能注意到你一直没有主动发问，于是指名叫你答问题，结果你却答错或答不上来，岂不当场丢人现眼？

* 要任课老师解释某些疑点．如果你的问题问得很恰当，老师偶然会肯把进度搁下，花些时间替你解释一些疑点．不过这种机会不大，全赖班级的大小跟老师的脾气，所以这可能是个好的策略，也可能是个坏的策略．

* 要让坐在你旁边的人对你产生好印象．修微积分能让你认识一班新同学，里面当然不乏你很想结交的异性．在课堂上大概没有什么比展现熟练的整合技巧，更能吸引异性的好感啦！

记住，所谓来得早不如来得巧，时间上的安排经常是极重要的关键．如果你要借用 4.2 节所举的例子，一定得选择一个非常合适的时刻去问，才会有效果．

4.2 问题举例

这儿先举两个可能是合适的问题模式，以后在这本书每章阐述主旨的段落里，这样的模式还会陆续出现．

1．“calculus”这个英文字是啥意思呀？

错误的答案：当你不刷牙的时候，牙齿上堆积起来的一层坚硬沉淀物①．

正确的答案：一种由牛顿和莱布尼茨发明的数学计算系统，最早是用在求斜率与面积上．

---

① 也就是牙垢石．“牙垢石”的英文为 calculus，跟“微积分”共用同一个词．

2. 老师！您这双鞋子超酷，是哪儿买的？

要拍教授的马屁得趁早，内容无关紧要，拔得头筹才是首务，晚了就变成东施效颦.

4.3 不该问的问题

1. 微积分有用吗？

你拿这个问题去问教授，就有如你去问一位在大象屁股后面的动物园清洁工说："你干嘛要穿这么难看的橡胶靴子？"对他们而言，答案非常明显，所以问题本身根本没有意义. 诸如电学、光学、声学、物质、人口增长、经济学、流行病学、统计学以及集邮（这只是举出少数几个例子而已）的基本理论，全依赖微积分. 如果没有微积分，经济学者便不能做非常准确的预测，气象预报也不能变成我们期望见到的完美无缺的科学，此外，电视可能会随时发生爆炸，飞机会从天空中掉下来，而香港脚，则会是永远无法治好的疾病.

2. 有人刚问过的问题.

若你问的问题刚好是别人几分钟前才讨论过的，那么可不会让任何人对你有好印象. 而只会暴露出你刚才一直在跟朋友聊前一晚的狂欢聚会，或是你上课迟到了.

3. 这个会考吗？

有些学生整个学期都在反复问教授这个问题，这样做很危险，因为在考试还未到来之前，教授很可能不记得哪里该考、哪里不该考. 你挑他答不上的问题问，岂不是跟他过不去？而且经过你这么一问，教授会误认为你根本不关心课程内容，你只关心成绩. 这对教授来说，无疑是情感上的伤害，人要是觉得被伤了感情，自然会产生报复的倾向. 所以不管你是否真的只是关心你的成绩，都不必把真相告诉教授.

4. fig newton 这种小西点的命名是不是为了纪念牛顿？



牛顿是历史上最伟大的思想家之一,他与高斯(Karl Friedrich Causs, 1777～1855)两个人，是能够同时名列数学家和物理学家前三名的仅有的两位. 但是在制作小点心上，他的聪明才智实在不怎么特别；他尝试过的小点心制作法彻底失败，有人甚至把黑死病的流行，归罪到他的胡桃小夹心饼上，这个说法很可能是冤枉了他.

(事实上，fig newton之所以如此命名，原因是它最早出现在美国马萨诸塞州的Newton，而该城镇的命名，的确是为了纪念牛顿，所以间接来说，这个问题的答案是肯定的.)

第5章 准备好了吗? 预备知识

在你准备上微积分的第一节课之前，我们最好花上几分钟，复习一下你在高中数学学过的东西.

5.1　你学过些什么

* 你在初中三年里，念的实际上只是一些复杂的算术，包括表面上看起来非常吓人的长除法问题. 其实大家都知道，这种问题只要有个计算器，解决起来一点也不费事.

* 至于高中三年嘛，你总该上过代数、几何跟三角学吧?

代数——讲的是如何解决一些诸如水流问题（已知船在顺流与逆流时的速率，求船速与水速）的复杂问题. 对这些问题，你可以写出联立方程式，然后求解.

几何——告诉我们如何证明，两条离得很远的直线（要非常勉强，才能画在同一张纸上）实际上相互平行. 当时你实在搞不懂，居然有人会对这么无聊的问题产生兴趣，不过话又说回来，上生物课的时候，大伙不是也把好生生的青蛙开膛破肚吗?

三角学——我若不提起，你根本记不得上过这玩意儿，不是吗? 之所以值

得单独提出来，是因为“三角学”是数学用词里面，在你尚未接触到“微积分”之前，最有资格用来吓唬人的.

5.2　在上微积分的第一天，你应该知道什么

代数

1. 能够把像 x^2-6x+8 这样的式子，因式分解成 $(x-2)(x-4)$.
2. 能够利用求二次方程式根的公式，找出满足 $x^2-7x+9=0$ 的解.
3. 知道 $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$，而 x^2+y^2 没法因式分解.
4. 知道 $\sqrt{x^2+4}$ 并不等于 $x+4$ 或是 $x+2$.
5. 知道 $(9x)^{1/2}=3\sqrt{x}$.
6. 知道 $\frac{x^2x^8}{x^3}=x^{2+8-3}=x^7$.
7. 能够找出满足式子 $\frac{x-2}{x+4}<7$ 的所有 x 值来.

对以上所举的任何一个例子，如果你搞不清楚该如何解答，那表示你的基本知识还得加强，才有可能学通微积分.

函数表示法

在微积分里面，函数都是以 $f(x)$ 这样的符号表示的，譬如：

$$f(x)=x^2-7x+5,$$

其中的 (x) 表示 x 是个会变化的量. 我们把 x 称为“变量”或“变数”，它担当的角色，有点像贩卖机上的投币口，你丢个 10 元硬币，就掉下一包面纸，如果丢进去的是 30 元，掉下来的就是一罐咖啡. 函数 f 的情况也很类似，只是不会掉出面纸跟咖啡. 你拿个 2 代入 x，就会得到 $f(2)=(2)^2-7(2)+5=-5$；如果代入 x 的是 3，那么你得到的就是 $f(3)=(3)^2-7(3)+5=-7$.

绝对值函数

根据我们当年的经验，这类函数最容易让人产生误解．其实它完全不像一般人心目中的印象那样，让我们举个最简单的例子：

$$f(x)=|x|.$$

你瞧它，一副多么无辜的样子，只不过是一个 x，然后在左右各加上一条短线罢了．不过，最重要的一件事，是应该把绝对值函数的真正定义搞清楚．许多人只是靠直觉，自言自语说："那个嘛，不就是把 x 变成正值的意思吗？"这个说法基本上并没有错，只是不够明确，照这个说法去解题时，一不小心就会捅出娄子．

正式的定义是：

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{若 } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{若 } x<0.\end{cases}$$

所以，$f(3)=|3|=3$，而 $f(-2)=|-2|=2$．这应该没有问题．

好了，现在咱们要看稍微复杂一点的函数了，譬如 $f(x)=|x-2|$．有人一看到多了点变化，脑筋就转不过来啦！其实大可不必为此手足无措．我们不是把绝对值函数的正式定义写出来了吗？在这儿，咱们只要把上面的定义写一遍，并且把其中的 x 用 $x-2$ 取代：

$$|x-2|=\begin{cases}x-2, & \text{若 } x-2\geqslant 0,\\ -(x-2), & \text{若 } x-2<0.\end{cases}$$

我们可以把它稍微简化，重写一遍：

$$|x-2|=\begin{cases}x-2, & \text{若 } x\geqslant 2,\\ -(x-2), & \text{若 } x<2.\end{cases}$$

不错吧！假如我们还需要把这个函数画出来，又该怎么办呢？一点也不难，咱们只需在图上 $x\geqslant 2$ 的部分，画出 $y=x-2$，在 $x<2$ 的部分，画出 $y=-(x-2)$．哇！就得到图5.1啦！

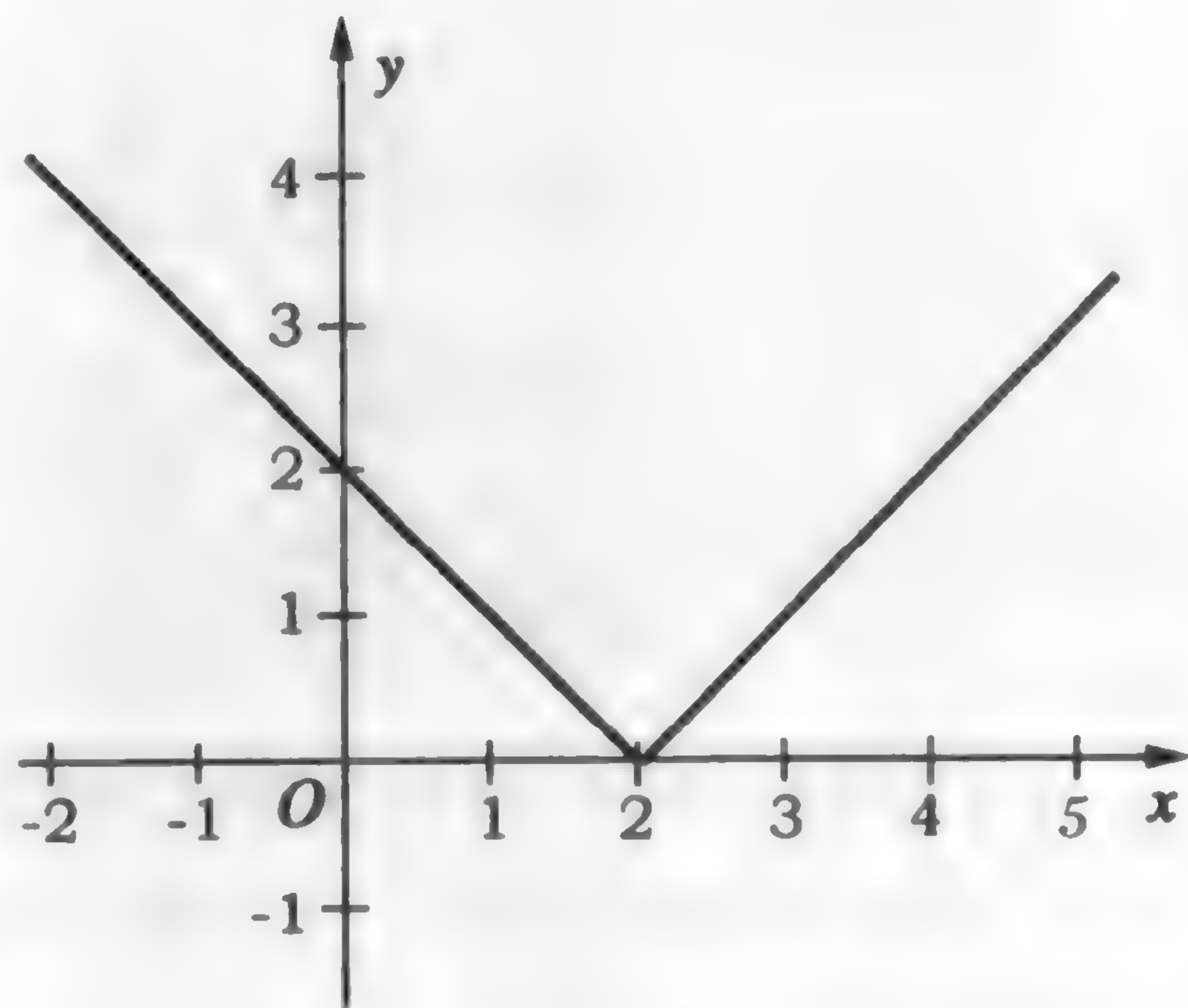


图 5.1　函数 $f(x)=|x-2|$

如果你想标新立异，以便引起某某人的注意，你也可以把绝对值函数另行定

义成 $|x|=\sqrt{x^2}$. 这跟前面说的定义其实相通，因为不管 x 是正或负，x^2 总是正值，而当我们反过来求一个正数的平方根时，通常会指它的正平方根. 不过，这个定义有点勉强，可能会造成一些不必要的困扰，所以除非你对平方根情有独钟，最好还是避免使用这个看似比较花哨的定义.

几何

几何是陪伴你度过青春期的一门重要数学课，它教你做了不少数学证明(假设你没花太多时间在异性朋友上). 咱们将在本书第 7 章，快速复习一遍你应该知道的部分，至于那些跟微积分不太有关系的相交等分线、SAS 定理等等，你可以暂时还给欧几里得. 如果在复习之后，你因而开窍，领悟到怎样才能叫做证明，以及相似三角形究竟是怎么回事，那就更好.

三角学

图 5.2 里面包含了大部分你所需要的东西.

$$\sin\theta=\frac{对边}{斜边},$$

$$\cos\theta=\frac{邻边}{斜边},$$

$$\tan\theta=\frac{对边}{邻边}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

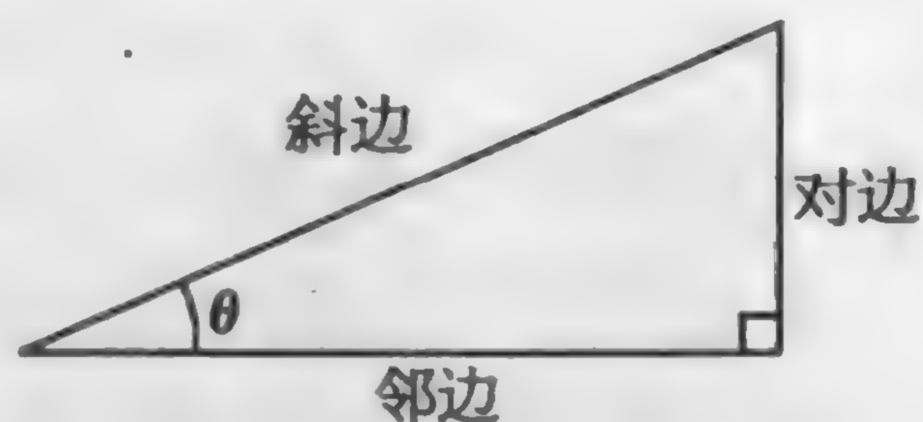


图 5.2 一角等于 θ 的直角三角形及其三边

此外还有：

$$\csc\theta=\frac{斜边}{对边}=\frac{1}{\sin\theta},$$

$$\sec\theta=\frac{斜边}{邻边}=\frac{1}{\cos\theta},$$

$$\cot\theta=\frac{邻边}{对边}=\frac{1}{\tan\theta}.$$

量角的大小，可以用弧度或是度当做单位.

当一个角大到整整转了一个圆周的时候，我们说它是 360°或 2π 弧度. 即 $360°=2\pi$ 弧度. 此等式两边皆除以 360，就得到 $1°=\frac{\pi}{180}$弧度.

你应该记下所谓标准角度，亦即0°、30°、45°、60°、90°及180°的所有三角函数值，还得记住这些标准角度各等于若干弧度.

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}.$$

$$30^\circ=\frac{\pi}{6}\text{弧度}.$$

$$45^\circ=\frac{\pi}{4}\text{弧度}.$$

$$60^\circ=\frac{\pi}{3}\text{弧度}.$$

$$90^\circ=\frac{\pi}{2}\text{弧度}.$$

$$180^\circ=\pi\text{弧度}.$$

$$360^\circ=2\pi\text{弧度}.$$

把度改成弧度非常简单，你只要把一个角的度数乘以$\frac{\pi}{180}$，得到的数就是该角的弧度值. 反之，若是一个角的弧度值乘以$\frac{180}{\pi}$，得到的就是该角的度数了.

有两个特殊的三角形相当管用，就是你在图5.3看到的30°—60°—90°三角形跟45°—45°—90°三角形. 一些特别的三角函数值如$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，可以一眼就从这两个三角形图里看出来.

如果你需要求大于90°角的三角函数值，譬如120°，不要慌张，只要依照图5.4里的做法，先画两条相互垂直

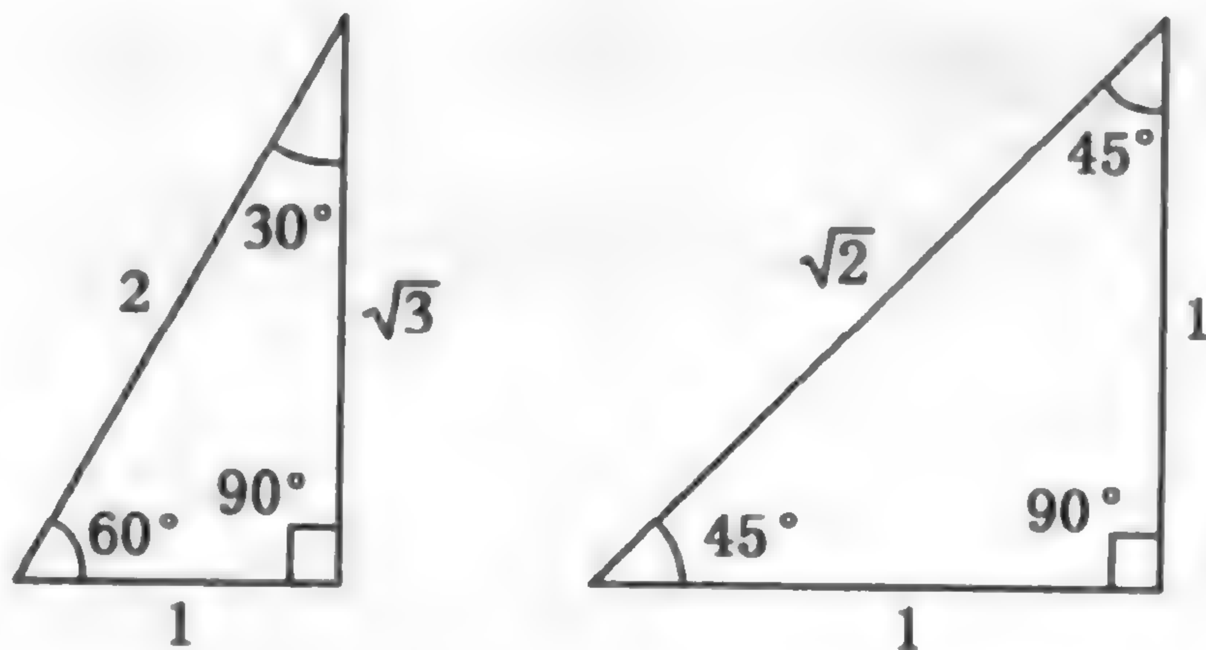


图5.3 应该记住两个三角形

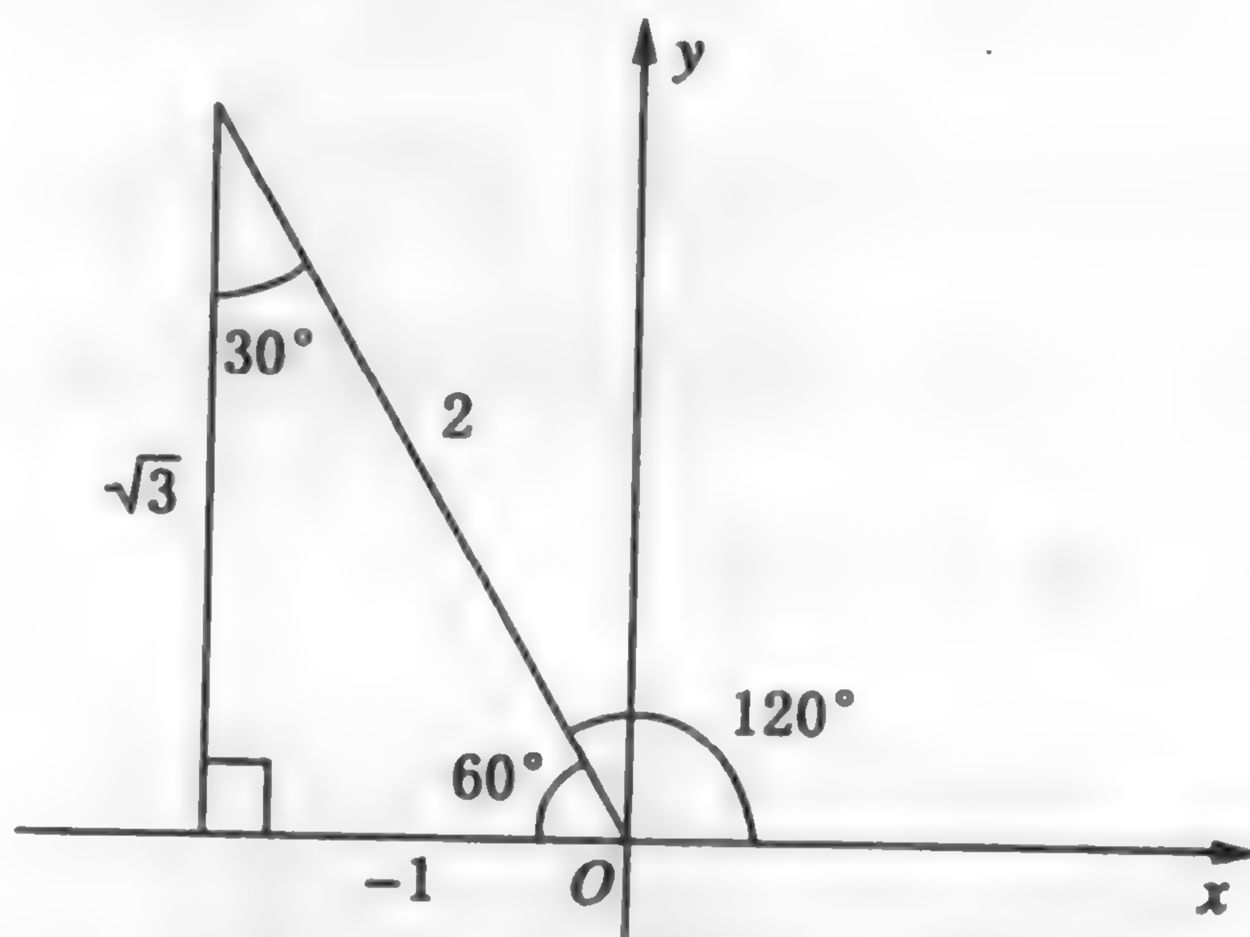


图5.4 求120°或2π/3弧度角的三角函数值

的 x 轴跟 y 轴，然后利用 120°等于 180°少掉了 60°的事实，在 x 轴负边的上方画一个 30°—60°—90°三角形，并且让它的 60°角落于原点上.

由于这个三角形的底边沿着 x 轴的负边，故应加上一个负号. 如此一来，我们就得到了 $\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$以及 $\cos 120°=-\frac{1}{2}$.

三角恒等式非常多，不过在你这学微积分时，所需要的几乎就只有一条，那就是

$$\boxed{\sin^2 x+\cos^2 x=1.}$$

这条恒等式无论如何都得背下来.

纯粹为了好玩，或是作为你往后的参考，我们顺便把一些其他的三角恒等式列举于下：

$$\sin(2a)=2\sin a\cos a.$$

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=1-2\sin^2 a.$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b.$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$$

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}.$$

$$\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}.$$

你可能终究还是会遇到一种讨厌的“反三角函数”，如 arcsin、arccos、arctan 等等. “反”字的意思其实很单纯：如果 $y=\sin x$，则 $x=\arcsin y$. 不妨举一个实际的例子. 由于$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60°$，我们就可以得到，$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=60°=\frac{\pi}{3}$弧度. 上述这些就是你目前需要知道的有关反三角函数的一切东西.

复合函数

贝多芬创作（compose）交响乐曲而留名青史. 在这一节，我们将告诉你如何去合成（compose）函数. 不过，写历史的人大概连瞧都不会瞧你一眼，了不起冷笑一两声而已.

合成两个函数的意思是，先运用一个函数求一个变数 x，然后再将另一函

数运用到结果上．譬如我们有两个函数：

$$f(x)=\sqrt{x},$$
$$g(x)=x+7.$$

我们可以先做 f，再做 g，把它们合成起来．写法是：

$$g(f(x))=g(\sqrt{x})=\sqrt{x}+7.$$

结果就相当于把函数 $g(x)$ 里面的每一个 x，都以 $\sqrt{x}$ 取代．

或者我们也可以倒过来，先做 g 再做 f：

$$f(g(x))=f(x+7)=\sqrt{x+7}.$$

这回是把函数 $f(x)$ 里面的每一个 x，都以 $x+7$ 取代．

你瞧，得到的两个函数并不一样，证明顺序在这儿很重要．记住，这儿所采用的顺序，跟西餐礼仪中使用叉子的顺序刚好相反：在餐桌上，你会发现面前有不只一把叉子，这时应该先拿起摆在最外侧、也就是最左边（洋人是左手执叉、右手执刀）的那把叉子，去吃第一道的开胃菜或沙拉，用第二把叉子吃第二道，一直吃到最后的甜点．如果你打出娘胎就从来没去过豪华西餐厅、也没学过这套陈腔滥调，我们的建议是，现在赶紧发愤图强，把微积分学个精通，将来赚大钱，然后专挑最昂贵的西餐厅去吃饭，而且随你高兴抓起叉子就吃！

如果你仍觉得有疑惑，这儿有个妙招供你参考．且让我们另取两个函数：

$$f(x)=\cos x,$$
$$g(x)=x^2+x,$$

然后计算函数 $g(f(x))$．这时该怎么办？

我们可以先取函数 g，把等号右边所有的 x 都加上括号：

$$g(x)=(x)^2+(x),$$

于是，你就看到了等号左右两边都有一样的 (x)，这告诉我们，不论括号里装的是啥，只要都是同样的“如是这般”，这个等式永远成立．换言之，我们可以把上式写成

$$g(\text{如是这般})=(\text{如是这般})^2+(\text{如是这般}).$$

在我们的问题中，式子就写成：

$$g(f(x))=(f(x))^2+(f(x)).$$

由前面，你知道 $f(x)=\cos x$，把它代进去之后，你就有答案啦：

$$g(f(x))=g(\cos x)=(\cos x)^2+(\cos x).$$

厉害吧！你过去 6 年所学的中学数学，经过我们的一番浓缩，用 8 面的篇幅就讲完啦. 我们的确故意遗漏了许多重要的内容，原因只是它们刚好跟微积分不太有关系，不过，它们虽然跟微积分扯不上边，并不表示没啥实用价值. 譬如说，证明两三角形全等的 SAS 定理，另外还有，计算原价打了七折之后的价钱等等，日常生活里都少不了它. 所以不要丧气，以为你全都白学了.

还有，在你青少年的时候，你不但得迎战青春痘，应付荷尔蒙的冲击，还得天天面对一个最重要的问题：今天有没有人愿意跟你一起吃饭？在那么多干扰下，老师居然能把一些知识塞进你的脑袋，可真不容易.

5.3 电脑与计算机：咱们的 2－bit[①] 朋友

在这年头的微积分课程里，老师可能会另外教你如何使用电脑（运行电脑代数系统）、绘图计算机、可写程序的计算机，或者普通的老式计算机. 果真如此，你可就踏进了数位微积分的世界了. 这些工具不但能迅速而正确的帮你做各种计算，还能扩展你的既有知识，它们让你在学习的时候，能够一次同时实验、处理许多不同的范例，从而对课程主题了解得更透彻. 不可讳言的，这些工具也偶尔带来了一些困扰，譬如你有时会找不着电源开关或是 Alt－3 键. 现在就让我们逐个谈谈各种不同的可能工具吧.

首先谈谈电脑代数系统. 应用在微积分上的电脑代数系统不只一种，各有自己的名字，诸如 Mathematica、Mathcad、Maple ，以及 DERIVE. 所谓的电脑代数系统，就是一种利用许多公式跟方程式来变戏法的套装软件，里面的程序能替我们做各式各样的代数问题，比方说，因式分解 x^2-5x+6，或是化简分式 $\frac{x^2-1}{x-1}$.

其实它们的本事还远不只此：它们能够做许许多多微积分的基本运算. 求

① bit 为二进制中信息的基本单位.

一些简单函数（和不太简单的函数）的导数，以及去判定不定积分跟定积分等等．而这些，全是我们即将在这本书里讨论的种种运算，或构成微积分的基本要素．

听我这么一说，你可能按捺不住要问："等等！如果这些机器能够解决这么多微积分问题，我何必要学微积分呢？我可以让那些机器去干活儿，我自己只要坐在游泳池边，喝着五彩缤纷的热带饮料就好了．"

其实，电脑压根儿不了解它自己在干什么．不错，你把问题一输入电脑，答案就出现在你眼前，但是电脑不会解释结果，更不会利用这些结果去赚大把银子，这部分只有你才能游刃有余．瞧，这样子的安排对咱们人类来说可是一桩好事，要不然，电脑便会取代你到游泳池鬼混，而你呢，则必须花整天的时间去学习如何擦拭电脑的记忆晶片啦．

电脑与计算机在绘图方面特别在行．在你输入一个函数之后，电脑不仅马上把图像画好，还能以所有不同的角度显示出来，并且告诉你什么地方有峰，什么地方有谷．如果你手边有电脑，而且自己又对电脑绘图技术滚瓜烂熟的话，你就会摇身一变成为绘图大师，什么 GNP、GAP、MTV，全难不倒你①．

而在使用电脑与计算机时，最糟的事情莫过于去理解那些小配件，一旦你抓到诀窍，熟悉该按下哪个键，你就如虎添翼了．但是在熟悉之前，你可能得经历一段最让人不安的摸索期；太多的学生常为了要寻找一个指令，折腾一个小时，然后才发现自己拿错了使用手册．所以，关键在于善加利用机器的力量．

那么，要怎么善加利用呢？最好的方法是请人实际做给你看．抓住同学、任课老师或是电脑公司的咨询人员，请他先做示范，然后看你实地操作好几个范例．务必要求他把示范做得彻头彻尾，从开机到结束．由于与计算有关，所以即使整个过程你只有 1% 不知道（譬如不知道你的账号放在哪个目录之下，或该怎么点出程序），电脑便会拒绝跟你合作．因此，先找个人看着你做．

在你执行运算的过程中，电脑不时会给你一些考验，它会把你的文件弄丢，或者变得不听使唤，根本不理会你的指令，再不然就是测试你有没有发

① 这三个英文缩略语分别为：国民生产总值（Gross National Product）、在校平均成绩（Grade Point Average）、音乐电视台或音乐录音带（Music Television）．

疯．一般人的反应多半是："唉呀！我准是按错了什么，这下惨啦，这门课看样子是垮定了，老天帮帮忙吧！"这时，正确的反应应该是："我敢说坐在那边的超酷上网族，会愿意过来帮我瞧瞧我的电脑究竟出了什么毛病．"不妨把这些突发状况当做锻炼社交技能的实验机会，而把电脑室当做你个人的人际关系培养皿．

在微积分里，还有其他许多地方用得到电脑或计算机，譬如，它们对于一般的极限，特别是发生在导数中的极限过程，能够提供相当好的直觉．在讨论数值积分的第 22.5 节，就涉及大量数值的相加．此外，在书里的其他相关部分，我们也附了一些简短的程序，可以拿来使用在可写程序的计算机或电脑上，做些运算．

总之，计算机或电脑可以成为学习微积分时的有效辅助工具，它们为今天的一般学习者，提供了前所未有的理解机会．利用各种工具来探索微积分的多彩多姿，你就更能深刻了解它．

第6章

如何应付考试

你是否曾经在考完试后，发现答错了不该答错的地方，于是气得直跳脚，自怨自艾地说："考卷上的问题我全都会做啊！"但是不知怎么的，在面对考题的时候，明明该取平方，却取了平方根，该用"弧度"，却用了"度". 这种倒霉事儿要怎么预防，才不至于历史重演呢？

大部分的学生都不了解，其实学数学跟学语言非常相像. 譬如你初学法语时，学会了一句关键用语. 像是"Où est la toilette?"（请问厕所在哪儿呀?），顿时觉得信心十足. 于是你买张机票飞到法国去旅行，满以为可以如鱼得水，畅游一番. 实际上却是，你呆在巴黎的两星期里，别人都在忙着吃美味的点心，看着古老的名画出神，而你只能问当地人最近的公厕在哪里. 所谓不经一事、不长一智，这时你才真正体会到，学语言贵在多学习多练习.

学数学跟这没两样，仅仅知道一点皮毛根本派不上什么用场. 你必须滚瓜烂熟，深谙其中的道理，这样才能一见到考题，就马上知道下一步该怎么走，一切似乎变成了你与生俱来的一部分.

当然，在练习做到滚瓜烂熟之前，你会希望先掌握重点，避免走冤枉路. 什么是重点呢？当然，就是考卷上会出现的东西.

6.1 会考些什么

想打听会考些什么，最直接的消息来源当然是任课老师啦．但不同的老师有不同的做法．有的老师可能会列出一张课程大纲，里面会指出考试范围，也有老师会在课堂上宣布考试重点．

不管他们的喜好如何，绝大多数的老师都是在考前那个星期，才会出考题，在此之前，可能连他们自己都不知道会考什么题目．（当然，凡事都会例外，特别是有些老师不喜欢每遇考试就得绞尽脑汁出题，所以他们会用一个一劳永逸之计：准备两套考题，轮番使用.）

事实上，教书先生都讨厌考学生，因为准备考题是费力不讨好的事，批阅考卷更是可怕的梦魇．如果他们能找到其他方法督促学生用功念书的话，你就再也不用担心考试了．

天堂里的微积分

两位老教授坐在教员休息室里喝茶聊天，谈到他们是多么喜爱教书，又多么厌恶出考题．

其中一位说："我敢打赌，在天堂里一定没有考试！因为所有来上课的学生都做好了预习，当老师的也就永远不需出题考试和评分．"

另一位听了直点头说："要真是那样就再理想不过啦！这样吧，咱们哥俩现在订个约，谁先翘辫子，谁就要记得回来告诉另外那位，在天堂教微积分是怎样的情形．"

第一位老先生不假思索就一口同意："咱们就这么办！"

一星期之后，第一位老教授不小心踩在别人丢弃的保险套上，滑了一大跤，就离开了这个世界．当天夜里，他果然依约来到第二位老先生的梦里，第二位老先生非常兴奋地问道："快告诉我，那边的情形究竟如何呀？"

第一位老先生慢条斯理地回答道："我有好消息也有坏消息．好消息是，天堂里也有微积分可教，而且我必须告诉你，那儿的学生真是好极了，既热衷于课堂，又用心听讲，老师们的美梦真的成真了．有如此的好学生，当然用不

着考试！叫它天堂，可不是乱叫的.”

第二位老先生听了非常兴奋，兴冲冲地说：“哇！果然是一等一的好消息.那么你说的坏消息又是什么呢?”

第一位先生耸了耸肩，答道：“你的课将排在星期一.”

随着考试日近，任课老师很可能才发现，有些应该要考的重点还没在课堂上讨论过. 所以，若是老师在考前加开复习课，不管你是喝浓咖啡也好，拿铁锥刺大腿也罢，定要想办法集中注意力，聚精会神，一个字也不能漏掉！

6.2　如何备考

1. 把老师指定的习题看过一遍. 如果没有时间全部再做一次，你可以把所有的习题列出来，然后从每一节任选一题来做，如果你被打败了，那就表示你得复习那一节的内容. 你若是肯花功夫把所有的习题全都这么复习过，这次考试便成了你的囊中物啦. 经验告诉我们，只要你熟悉老师指定的习题，就会考得高分.

2. 去发掘过去的考题，然后全做一遍. 这对性格比较积极进取的学生来说，是稳拿高分的一项保险措施，因为对老师来说，用过去的旧题目来炒冷饭，远比设计全新题目容易得多. 你若当了教授，就会了解出考题的确不简单，题目不宜太过容易，也不能难到变成无解（尽管后面这项限制，有时也不免遭到忽略），题目里用到的数值，都得精心设计过. 所以，老师宁可把过去两年用过的旧考题翻出来，略加修改.（至于年代更久远的老考题，天知道给积压在哪一堆稿纸中！）

3. 请专家指导. 当你发现有个问题不知道该如何解，也看不懂教科书里弯来绕去的解释，这时该怎么办呢？告诉你，这种情况就是吃这行饭的专家派上用场的时候了. 你最先想到的，当然是教你的教授或助教，但是不巧，此刻他们多半：

* 正在睡觉，因为现在是凌晨 3 点钟.
* 已经被 247 位学生包围.
* 不知躲到哪儿去啦，怎么也找不着.

怎么办？急得去撞墙？千万别做这种于事无补的傻事. 你还有另一个宝贵的资源没有利用呢——那就是你的同班同学.

4. 请业余高手来协助. 一般说来，当学生搞懂了一个题目，譬如分部积分法，这时让他们最高兴的莫过于能现买现卖，解说给那些还没开窍的同学听. 如果你能找到一位女同学，刚好在你前晚熬夜以至于隔天精神恍惚的那堂课上，听懂了老师的讲解，而且愿意为你讲解，这岂不是一件非常值得自豪与高兴的事情吗？你也可以退而求其次，找去年修过课的学生帮忙，只不过他所记得的东西，正确性得打个折扣. 不管怎么说，由学生给你解说还有一个优点，就是他们不太可能使用一些如“由单位区间的完备性及紧致性可知”或“利用皮亚诺的第三公理”的词汇来解释.

5. 模拟考试. 一般人在读着习题解答或细看一个做出的解时，常以为自己都懂了，其实有些东西你只是似懂非懂，你只是在不知不觉中，让自己以为解出了一道问题，但当一进考场，见到考题的时候，你的脑子里顿时一片空白. 这时该怎么办呢？你可以假想自己在考试，测试对一个考题究竟了解多少. 先搜集一些考试范围内的题目，各种类型的都随便选上一个，然后给自己一个小时作答，看看成绩如何. 如果你在这种模拟状况下都能做好，那么考试就没问题啦！

6.3 不为考试而钻研

1. 收起你的记号笔. 不要再用笔在书上画重点，因为这种老掉牙的读书方法，根本就是浪费时间，不会有效果，充其量只能用来催眠. 勤做习题才是正途.

2. 别过多地追问教授会考什么题目，除非他完全忘了这回事. 教授都非常讨厌这类问题，而且几乎永远不会给你任何有用的答复. 其实不问也知道，题目一定跟去年或前年考过的大同小异. 与其浪费时间去纠缠教授，远不如回宿舍做习题管用.

6.4　应考须知

1. 准时到达教室. 任何迟到的借口都很难获得老师的谅解.

一个跟轮胎有关的借口：两位同学在考试前夜喝得大醉，打算一觉到天亮，但隔天却睡过头了，他们知道麻烦大了，于是商量好对教授说，他们在来学校的路上，车子爆胎. 教授听了，对他们说："没关系，你们今天下午 5 点到我办公室来，我给你们补考."他们心里暗自高兴，马上从刚考过的同学那儿，打听到所考的试题也搞清楚了正确的解答方法. 当天下午，他们去办公室报到，教授却告诉他们："把书留在我的办公室，然后我要你们在两个房间里考试."两人起先还忐忑不安，等拿起考题一看可真是喜出望外，考卷上一个字也没有改. 不过，另有一页纸用回形针夹在最后，上面写着："下面这题占 50 分：请问今天早上是哪一个车轮爆胎?"

2. 看清楚每个问题. 在你开始作答之前，一定要确知问题在问什么. 我们当老师的就经常遇到，许多聪明的学生写下了些漂亮的答案，可是答非所问，因为他们一时大意，误会了题意.

3. 先做容易的题目. 有太多学生最常犯的错误，就是按照考题的次序解题，这么一来，一碰上难题，就经常得花上太多宝贵的时间. 偏偏有些教授还特别喜欢来个下马威，把难题放在前面，把学生考得惨兮兮的.

4. 尽量争取多得一些分数. 千万、千万、千万（没错，就是三千万）不要让题目空着. 要知道，教授都希望多给几分，因为斟酌给个几分，是一种强迫性的人类本能. 就怕你一个字也不写，那他们就爱莫能助了. 当然，你若是

要写些东西，也不能太过天南地北，最好还是要跟问题有关才行．如果纯文字题，可以画图，表示你了解问题问的是啥——就加上该有的坐标轴，标上 x、y、z，另外再画上几个点．总而言之，不管你怎么写，就是不要一个字不答．

5．不要急着把写错的答案涂掉．尤其是在最后五分钟，千万不要一时性急而把整页擦掉．如果你真的无法控制住情绪，就在你认为答错的部分，画上一条斜线好了．如此一来，万一你并未答错，心肠软的教授都会假装没看见那条斜线，了不起扣你几分而已．

6．不要提前交卷；检查你的答案．绝不、绝不、绝不（不错，就是三个绝不）在铃声响起之前，交卷离开．作答完毕后，应该利用多余的时间从头到尾仔细检查一遍．可另外在草稿纸上重做一遍，要是答案不同要赶紧找出哪一个对，而且愈快愈好．还有一点值得特别注意，那就是应该想想答案是否合理．譬如说，问题问的是在 1993 那一年，某某市一共阉割了几只狗？而你的答案为－4596（注意是负号），那么一定是错的．

这条“不要提前交卷”规则的惟一通融就是，如果你的教授受过 20 世纪 60 年代嬉皮思想的影响，主张考试不该限时．那么，在考了一整天之后，太阳开始落山，其他同学皆已离去，教室里只剩下你与教授两个，这时你就可收拾一番，准备交卷啦！

7．考卷发回来后，仔细查阅一遍．在一个有 100 个学生的班级里，每次考试都很可能至少有一个学生，被少算了一些应得的分数．原因其实很简单，当老师一口气评完前 45 份考卷，而每个人都写着 $\frac{dy}{dx}$，这时候如果你写着 $y'(x)$，他就会觉得非常陌生，于是画了个大叉．所以如果你发现考卷上有什么地方，被扣了分数而你搞不清楚原委的话，一定要去请问教授或助教．甚至在你并不怀疑分数有错的情况下，也不妨虚心求教，了解你错在哪里，将来才不会再犯同样的错误．

在向他们求教时，千万不要说：“我认为我这题应该多得几分，因为我原来就会做，只是没时间做了！”或“我当时想到的是正确的答案，但是写的时

候写错了！”只有毫无经验的老师，才有可能相信这些鬼话，至于其他的老师，搞不好还会再仔细检查考卷上其他部分，挑毛病多扣你几分．教授最厌恶学生无理取闹，要求不应该得到的加分．不信的话，你去试试看．

8．不要求情．有九成九的教授，不会因为你跑去跟他说如果你考得糟糕，你的老妈就会拒绝继续替你付贷款买车，而帮你加个几分，虽然现在的确有少数缺乏经验或心肠特别软的老师，会因为你的求情，有限度地奉送分数．但是即使让你一时得逞，在内心深处你将永远记得，好些分数事实上不是你应得的，终有一天，你心中的罪恶感会逐渐扩展，取代了原先的喜悦，逼得你去借酒浇愁，逃避良心的谴责．

最后，你终于从烂醉中醒来，发现自己龌龊不堪、蓬头垢面、神色憔悴、头疼如捣、舌若砂纸，这时你才大梦初醒，了解到自己竟已经付出如此惨重的代价！于是，你必须回到数学系大楼，去找那位菩萨心肠的教授，向他恳求说：“拜托！请你再行行好，把那些我以前跟你要来的分数拿回去吧，我实在消受不起啦！”教授见到你这副德行，会说：“你是谁？我根本不认识你，我的学生没一个像你这样邋里邋遢！”于是他按了警铃把校警叫来，你就被他们架了出去，像垃圾似的丢到临近的贫民窟去了．所以，就省省事吧，免得自取其辱．

第7章 直线、圆、圆锥曲线族

7.1 笛卡儿平面

所谓笛卡儿平面（也称为坐标平面或 xy 平面），就是用来描述你在上面画图的那张纸的那个平面，表示的方法就是其上的所有点，都用两个数标示．这两个数就叫做坐标，写成（2，7）或（3，12）等等．一般的写法就是（x，y），其中第一个数叫做 x 坐标，而第二个数则叫做 y 坐标．另外你得特别选出一个参考用的定点，称为原点．于是，坐标里的 x 表示该点在原点的右侧，水平距离等于 x，而 y 则表示该点在原点上方、垂直距离等于 y 的位置．请看图 7.1.

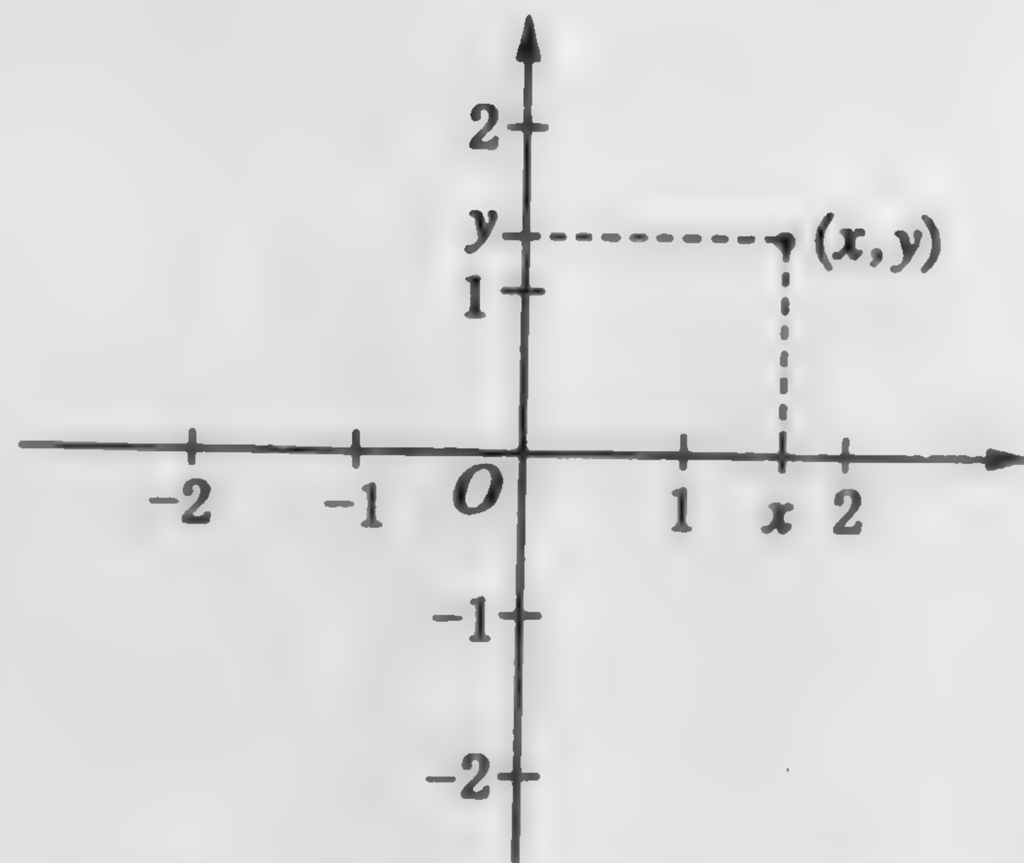


图 7.1 笛卡儿平面

笛卡儿（René Descartes，1596～1650）是法国数学家，也喜欢搞哲学（曾有名言“我思故我在”），他在 17 世纪提出了坐标平面的

概念.（好吧好吧，不讲历史了，改讲一则小笑话：有一回，笛卡儿难得把工作暂时搁下，去参加一个聚会. 主人见到这位稀客，马上热情招呼他："老笛！来杯酒如何?"笛卡儿回答："我不认为我想喝."话一出口，他的人就不见啦!）

也许是因为笛卡儿不是左撇子，所以把 x 坐标定为原点右方的距离，而非左方. 同样的，因为他一生住法国，而不是住在澳洲，所以 y 坐标的方向是朝上，而非朝下. 另外值得一提的是，"笛卡儿坐标系"的英文是用 cartesian 这个字，而不是从他的姓氏变化成的 descartesian，这是因为他的拉丁文姓氏是 Cartesius，而那个年头的学术论文一概得以拉丁文发表.

在笛卡儿公布这项发明之前，几何（三角形、圆等等）与代数（解方程式）是独立不相干的两门学问. 有了笛卡儿的平面坐标系之后，情况大变，一个像 $y = 3x$ 的方程式变成了一个可以画出来、眼睛看得见的圆. 这在当时真是旷世突破，造成西方学术界极大的轰动与庆祝活动. 不过话说回来，在 17 世纪那样的年代里，再大的庆祝活动，也不过是大伙当天夜里不必再光啃大头菜了——餐桌上会破例出现难得吃到的野猪肉.

7.2　一般作图妙方：抛物线的寓言

好啦！每个人都知道如何画函数的图像，对吧？方法就是随便挑 5 个数，一个个代入 x，找出相对应的 5 个 y 值来，把这 5 点画出来，最后再把这 5 点连起来就大功告成了. 如果你要更精确的图像，那就多找些点，譬如用 15 个点来画.

这是最基本的作图方法，谁都会做. 但是这方法显然有一些缺点，比方说，图 7.2 (a) 的确取了 6 个点，然后连起来，但连出来的线完全没有表示出我们要画的函数 $\frac{1}{x}$ 的一个特征：当 x 从右边趋于 0 的时候，$\frac{1}{x}$ 会趋于 $+\infty$，而从左边趋于 0 时，则趋于 $-\infty$. 我们是假定点跟点中间，没有啥了不起的变化会发生——这种假定有时候是错的.

又譬如我们真的需要知道，一个函数的最高点的位置，我们总不能赔上一

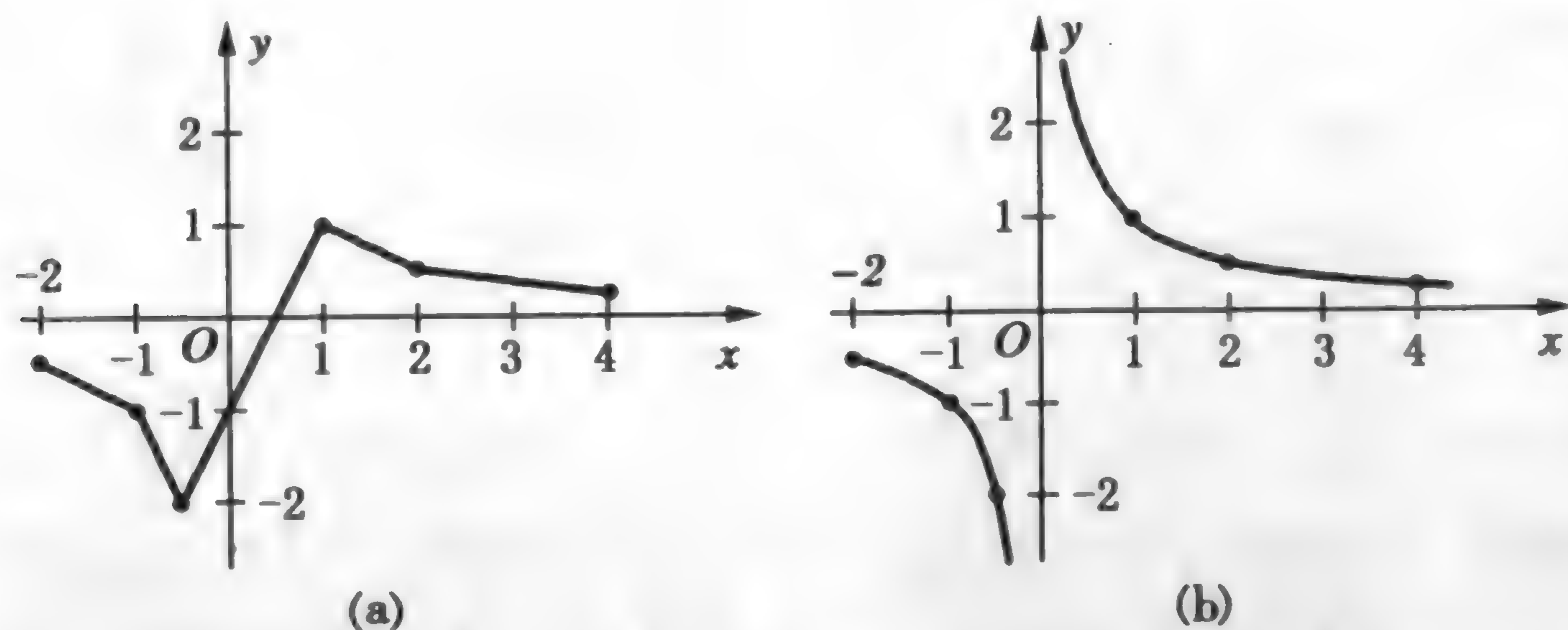


图 7.2 (a) 用连接几个点的方法画 $y=1/x$ 的图像，所得到的错误答案 (b) 正确的图

整天的时间，去一个点一个点地找吧. 有了微积分，这种问题解决起来不过举手之劳，快速之至.

当你遇到一些从未谋面的函数时，你可以按照一些通则，大约想象出图像的长相. 现在就让咱们以抛物线函数 $y=x^2$ 为例，来瞧瞧这些法则要如何运用(请看图 7.3).

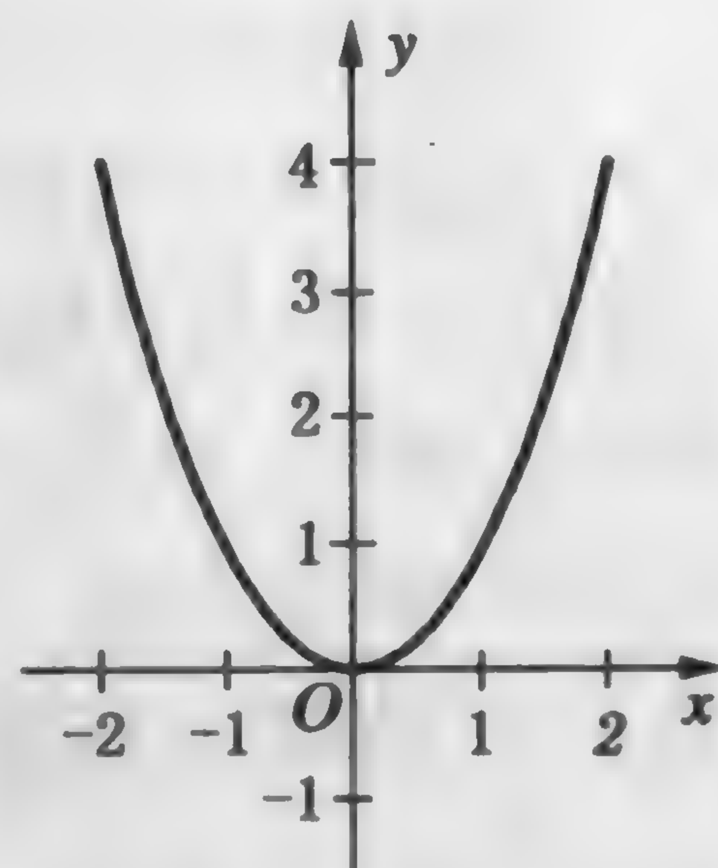


图 7.3 抛物线 $y=x^2$ 的图像

抛物线的寓言

从前有个小抛物线，因为受到太多好莱坞电影以及形象广告工业的影响，自惭形秽，总觉得自己身材不好. 他整天在报纸、电视上看到身形美丽、体态婀娜的曲线，看得他自叹弗如. 简言之，就是他已失去了自信. 他的爸妈，糖罐子夫妇，看看拿他没辙，只得送他去看心理医生.

心理医生跟他简短谈过之后，直截了当地说："问题出在：你很丑." 小抛物线闻言大吃一惊，尖声叫道："我要再找位医生，听听不同的意见!"

"那好吧，" 心理治疗师回答道，"你要听不同的意见，我马上可以给你一个——你不但丑，还很愚蠢." 说完他停了一会儿，然后接着说："不然的话，你就不会成天对自己的外表耿耿于怀，而是会把注意力放在你的数学内在上了. 嘿，在这方面，我帮不上一

点忙，不过我认为我们倒是可以想办法改善改善你的身材曲线."

于是，小抛物线接受了整套整容手术. 乘上 5 之后，他就变高变瘦了，再加加减减几个数字，就让他搬了家，换了一个新的环境，交到新的朋友，经过了较多的自我成长，小抛物线终于找到了他内心的小孩. 但是不幸的，他内心的小孩仍然非常难看而愚蠢，不过那已经与本故事无关，是另一个故事了.

如何移动 $y=f(x)$ 的图像

* 加一个常数到式子的右边，让图像上下移动. 譬如 $y=x^2+2$，就把原抛物线上移了 2 单位的距离 (见图 7.4a).

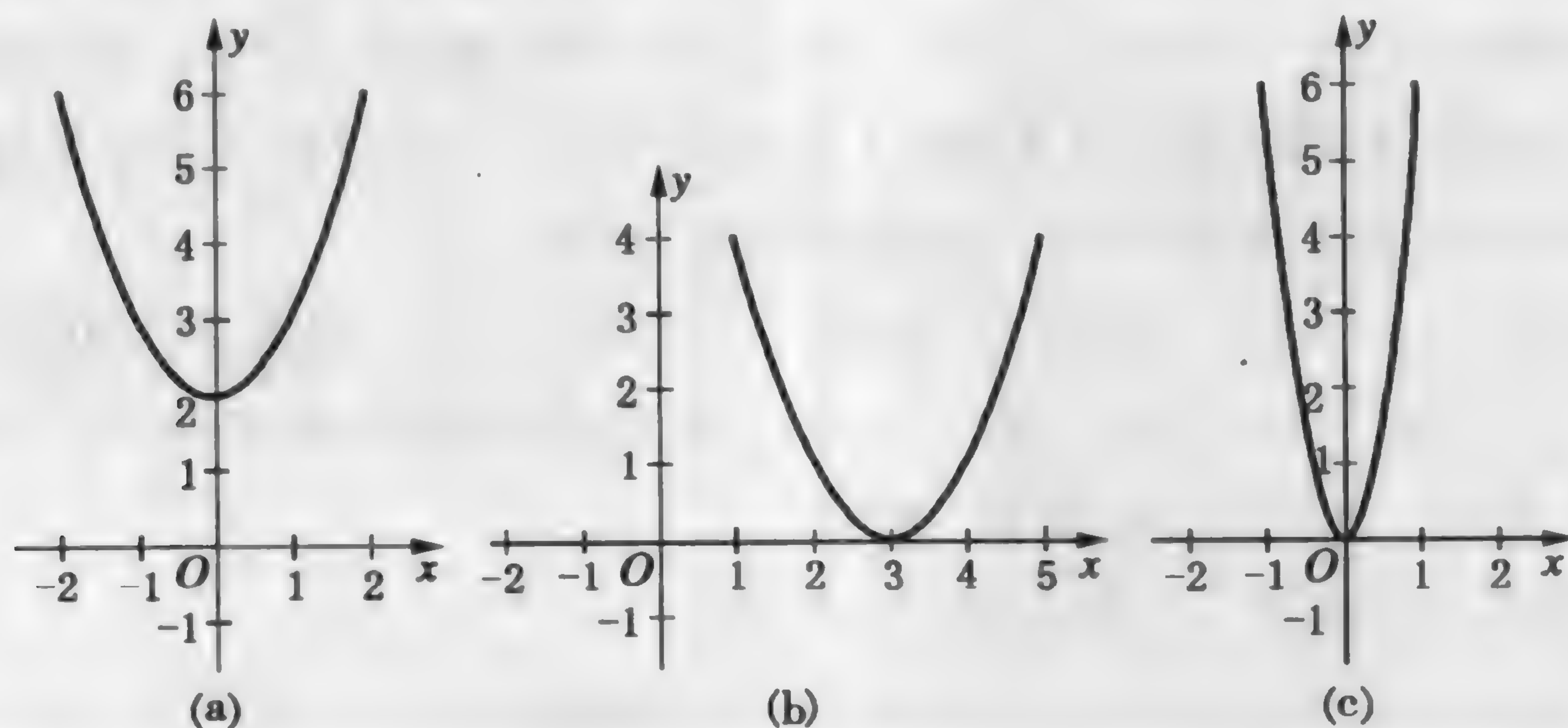


图 7.4　抛物线 (a) $y=x^2+2$，(b) $y=(x-3)^2$，(c) $y=5x^2$

* 变量 x 加一个常数，会让图像左右移动. 譬如 $y=(x-3)^2$，就把原抛物线向右移动了 3 单位的距离，(见图 7.4b). 若以 $x+5$ 取代 x，则会把抛物线左移 5 单位.

* 把函数乘以一个正的数，就会让图像长高或减肥. 寓言故事里是把函数乘以 5，让原式成为 $y=5x^2$，如此一来，原抛物线一下就被向上拉长了 5 倍，体形顿时从原先的广口碗变成了细长的花瓶 (见图 7.4c). 羡慕那样的身材吗？把你自己乘以 5 吧. 试试看，纵容自己一次，用 10 来乘——人永远不嫌自己太瘦.

* 在等号右边乘上一个负的常数，就会让原图形以 x 轴为轴倒转过来. 所以，$y=-x^2$ 的图形就是把原先那只广口碗翻过来. 现在如果家里所有的灯罩都被拿走了，你可以把它戴在头上去参加微积分聚会.

7.3　直线

“直线”的英文字 line，也是“台词”的意思．我们往往会对某些经典台词琅琅上口，譬如：“我是不是在哪里见过你？”、“Show me the money！”（电影《征服情海》）、“你看得出来，我每天只睡一个小时吗？”

要创作新的台词其实不难，有现成公式可用，譬如：“你不妨到 x 来，我会让你瞧瞧我的 y.”其中的 $x=\{$我的房间、我的橱屋、淡水$\}$ 的任何一个，而 $y=\{$收藏、蜥蜴宠物、淡水鱼丸$\}$ 的其中一个．公式中的 x 和 y 是变量，可以用各式各样的东西取代——这就是所谓的台词公式.

在数学里也一样。直线公式里也有一个 x 和一个 y，而且不会出现可怕的字眼（没有 tan、sin 等等）．这个 x 和 y 长得非常稀松平常——既不是住在“分母”里面，也不会被抬举为“乘方”.

下列 3 个方程式，代表 3 条不同的直线：

$$x=3.\quad（很好）$$

$$x+y=3.\quad（很好）$$

$$x=1-y.\quad（很好）$$

而下列两个方程式，则不是直线方程式：

$$e^y=\sqrt{x}.\quad（不妙）$$

$$y=e^x+\arctan x.\quad（不妙）$$

现在来点变化，看看下列 3 个方程式：

$$x+4=y-3.\quad（很好）$$

对啦！是一条直线．但是

$$xy=x+1\quad（不妙）$$

不是一条直线；尽管不能算是太离谱，但是其中的 xy 项提供了足够的偏差，使它无法成为直线.

$$\frac{2+x}{y}=3.\quad（很好）$$

上面这个方程式是一条隐藏得很好的直线！如果把方程式两边都乘以 y，

看起来就舒服多了：

$$2+x=3y.$$

让咱们再举一个例子，然后把相关的所有可能问题全提出来解答.

例题　$4x-2y=2$.

第一题：(1，2) 在此直线上吗？

抱歉，它们不在这直线上，因为$4(1)-2(2)=0\neq 2$.

下一题：要如何找出这条直线上的点？

这个嘛，一条直线上有无穷个点，这要怎么找呀？就让咱们用最容易的方法来解决这个问题. 我们先瞧瞧这条直线跟 x 轴及 y 轴的交点在哪儿. 这两个交点分别叫做 x 截距与 y 截距，它们很容易找，因为各自有一个坐标值等于0. 说得更精确些，点 $(0, y)$ 就是 y 截距，而该点的坐标满足我们的方程式：

$$4(0)-2(y)=2,$$
$$2(y)=-2,$$
$$y=-1,$$

所以我们这条直线的 y 截距就是 $(0, -1)$.

我们可以用同样的方法找出 x 截距，只要令 $y=0$，求 x：

$$4(x)-2(0)=2,$$
$$4(x)=2,$$
$$x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

所以这条直线的 x 截距就是 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

现在，由于我们知道了这条直线上的两个点，我们就可以画出这条直线了 (图7.5).

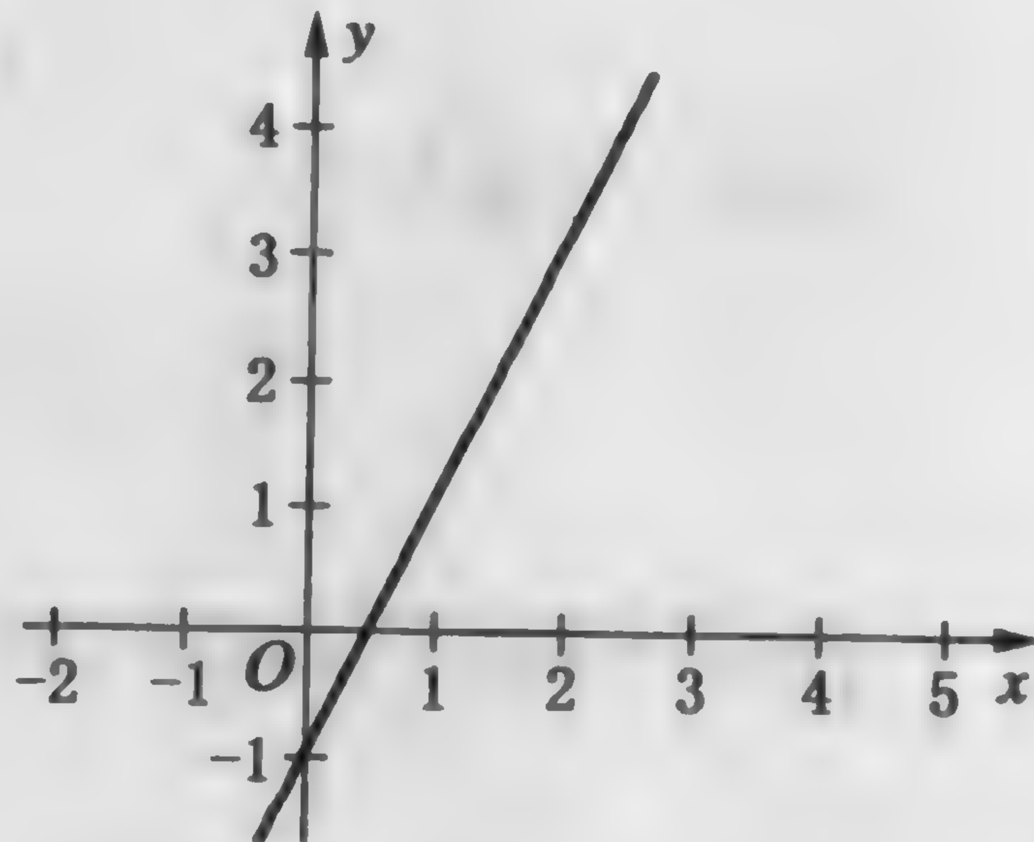


图 7.5　直线 $4x-2y=2$

重要注意事项　当你画一条直线时，能满足方程式的任何两个点都可以拿来使用，

没多大差别，所以如果你嫌上述方法太简单，你也可以找出另外两个点来．比方我们一眼就看出（1，1）跟（3，5）也满足该方程式，在图上把这两点用直线连起来，得到的还是同一条直线．你说，奇怪不奇怪？

直线的斜率

下一题：该直线的斜率是多少？

所谓直线斜率，是指该直线倾斜程度的一种量度．度量的方法是先随机截取一段水平距离（run），然后找出该直线在这段水平距离里的高度变化（rise），再把高度变化除以水平距离，得到的比率就是直线斜率．

run 与 rise 这两个术语源于古埃及人，他们每年在尼罗河即将泛滥、河面即将上升（rise）之际，必须及时逃跑（run）．老百姓得在心里算计好“河水上涨与跑步距离之间的关系”，这样才能在泛滥期到来前几个月，把体格锻炼好，才不至于淹死．最后，有人想出一个极为聪明的办法，建造出宏伟的金字塔，让人们可以爬上金字塔等洪水退去，而不必整整憋气 3 个月．

如果（x_1，y_1）跟（x_2，y_2）是直线上的任何两个点，该直线的斜率就可由下式得到：

$$斜率=\frac{垂直距离}{水平距离}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

对这个式子，我们可以取两个点为：

$$(x_1,\ y_1)=\left(\frac{1}{2},\ 0\right),$$

$$(x_2,\ y_2)=(0,\ -1),$$

因此斜率就等于：

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(-1)-0}{0-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

我们用直线上的其他两个点（1，1）与（3，5）另外计算一次：

$$(x_1,y_1)=(1,1),$$

$$(x_2,y_2)=(3,5),$$

斜率仍等于：

$$\frac{5-1}{3-1}=\frac{4}{2}=2.$$

传统上，斜率都是以 m 为代表，不过为什么用 m 却不得而知. slope、hill、incline、obliquity、cant、diagonal、slant、tilt 等等，不但都不是以 m 开头，就连字的本身也找不到 m 这个字母.

有的时候，“这条直线的斜率是多少?”这问题的答案是：“我不知道.”比较正式的说法则是：“它的斜率不存在.”要知道原因，就拿张纸来，先按规矩在纸上画相互垂直的 x 轴跟 y 轴，然后另外再随便画条直线. 你随意画的直线，几乎都会跟 x 轴仅仅相交一次（交点有可能在纸外），而跟 y 轴也仅仅相交一次. 只有那些一早心情就不爽的人，才会画出一条跟 x 轴或 y 轴平行的直线，也只有那些一整天心情都不爽的人，会画一条跟轴重叠的直线. 我们不妨称这些特殊直线为“挑战截距的”直线，给它们特别的关怀.

那些与其中一根坐标轴平行的直线只有一个截距（与另一轴的距离）它们的方程式看起来也蛮有意思的，变量只剩下了一个，就像 $3y=-14$. 你也可以这么说：其中一个变量去休假了，而休假的这个变量的轴就与你的直线平行. 所以，直线 $3y=-14$ 跟 x 轴平行. 这其实很容易从方程式上理解，因为它压根儿不在乎直线上各点的 x 坐标是啥，只在乎 y 坐标得满足 $3y=-14$ 或 $y=-\frac{14}{3}$.

至于 x 轴与 y 轴本身，我们现在还不准备讨论，因为它们的情绪太过“敏感”了.

直线方程式：标准形式

直线方程式的基本形式有两种：

1. 点斜式：

$$y-y_0=m(x-x_0).$$

这条直线的斜率是 m，并且通过点 (x_0, y_0).

2. 斜截式：

$$y=mx+b.$$

这条直线的斜率是 m，而 y 截距为 b.

所以，方程式 $y-2=4(x-3)$ 的直线，一看就知道它的斜率是 4，并且通

过点（2，3）．用代数方法把此方程式简化之后，它就变成了 $y=4x-10$，显示斜率仍然是 4（还好是 4，要不就惨了），而 y 截距为 -10．

7.4 圆

圆所扮演的角色也很重要．假定咱们要弄出一个圆的方程式，而且规定这个圆的半径是 r，圆心落在 xy 平面的点（a，b）上，也就是说，圆上的每一点（x，y），跟点（a，b）之间的距离都是定值 r．由勾股定理，我们知道（x，y）跟（a，b）之间的距离等于$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$，所以点（x，y）必须满足

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

所以

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

这就是以 r 为半径、以点（a，b）为圆心的圆的方程式，如图 7.6 所示．

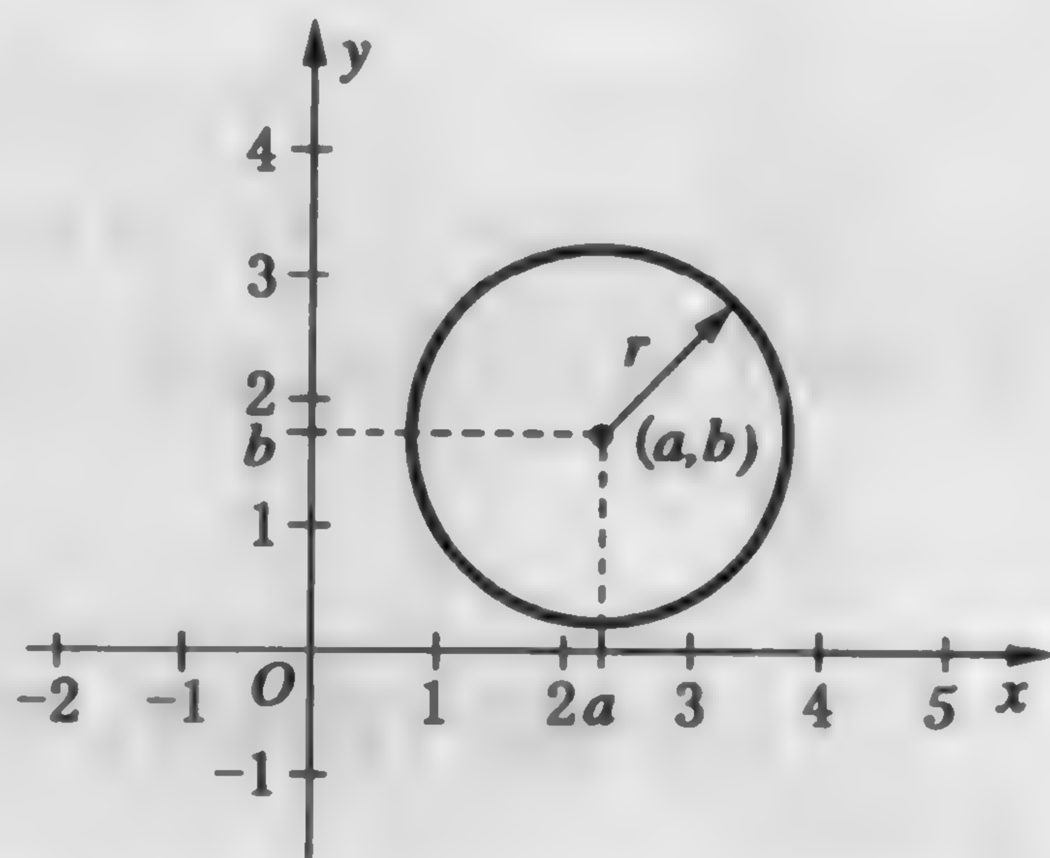


图 7.6　半径为 r，圆心在 (a,b) 的圆

关于圆，可说的就这么多了——应该说差不多就是这么多了．如果某天，你突然碰到一位其面不善的大个子，眼露绝望之色，手里牵着一只凶悍的德国警犬，递给你一张纸条，上面写着：

$$x^2-4x+y^2=6,$$

然后冲着你说："告诉我这方程式究竟在讲啥，否则我的来福会把你当成消防栓，在你身上撒尿！"

你可能会想，天下哪有这样的事情！殊不知这档子事在纽约中央公园里司空见惯．他给你的这个方程式看起来像是一个圆，但又有些不对劲，且让我们稍微处理一下．首先，将带有 x 的项跟不带 x 的项分开：

$$(x^2-4x)+y^2=6.$$

你马上就会注意到，如果加一个 4 个到括号里，它就变成一个完全平方式了. 当然，你不能只在等号的一边随便加个 4，在等号的另一边也要加上：

$$(x^2-4x+4)+y^2=6+4,$$

$$(x-2)^2+y^2=10.$$

如此一来，就可看出它是个半径为$\sqrt{10}$、圆心在点 (2，0) 的圆.

好了！至少对来福和微积分来说，与圆有关的东西你需要知道的就差不多了.

7.5　椭圆、抛物线、双曲线

这几个家伙自称为“圆锥曲线族”，原因是它们的出身一样，都来自于把一个圆锥用平面切开的结果，之所以长相不同，完全是切的角度不一样. 虽然它们一块儿出现时，有时真叫人心惊胆战，但是在落单的时候，可一点横行霸道的气息也没有.

椭圆

这是一个学圆学得不像的怪胎，只怪它为人处世不够圆滑. 它的标准方程式如下：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

式子中的 a，是该椭圆沿着 x 轴方向的“半径”，而 b 则是沿着 y 轴方向的半径 (图 7.7)，且中心点落在原点上.

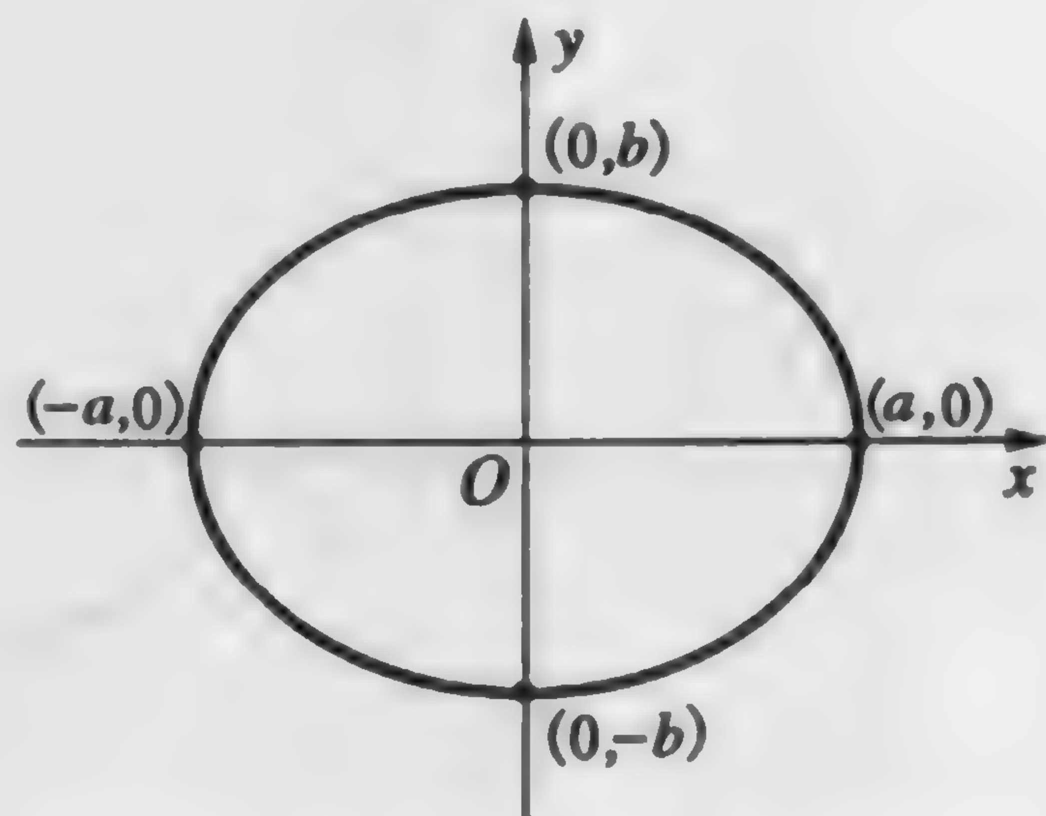


图 7.7　椭圆

若是想移动它的中心点，我们只需要塞进某两个常数. 以下就是同一个椭圆的方程式，只是它的中心点从原点移到(x_0, y_0)了：

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

这种平移技巧只能算是最起码的小儿科，

我们当然还可以把它转一个角度，变成歪歪的椭圆. 抛物线跟双曲线同样可以斜一个角度. 不过，这种方程式很古怪、棘手，极不可能出现在你目前的微积分课程里.

抛物线

我们已经在前面讨论过抛物线了，这样就只剩下那极容易亢奋的曲线——双曲线了.

双曲线

双曲线这种曲线，看起来最需要镇静剂的帮助，它同时朝两个不同的方向射出去. 不过它的方程式倒是很简单的：

$$y=\frac{1}{x}.$$

如同前面处理过的抛物线、椭圆，我们也可以在它的方程式里做点手脚，改变它的位置或形状 (见图 7.8).

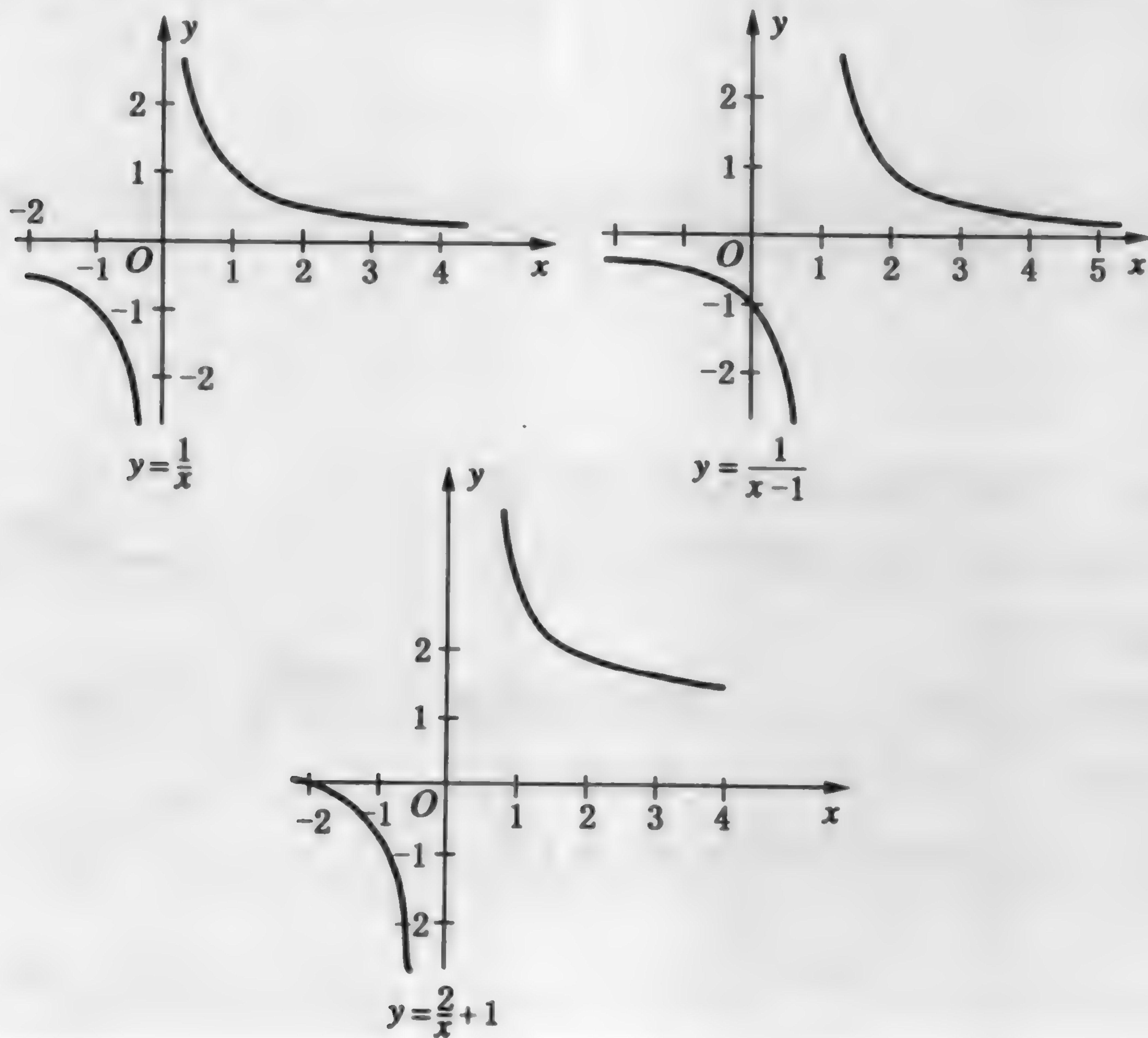


图 7.8 各种双曲线

我们从另一种形式的方程式，如 $y^2-x^2=9$，也可以得到双曲线（见图7.9）. 你或许已经注意到这个方程式有些奇怪，当 $y=0$ 时，x 无解，所以它的曲线不会跟 x 轴相交.

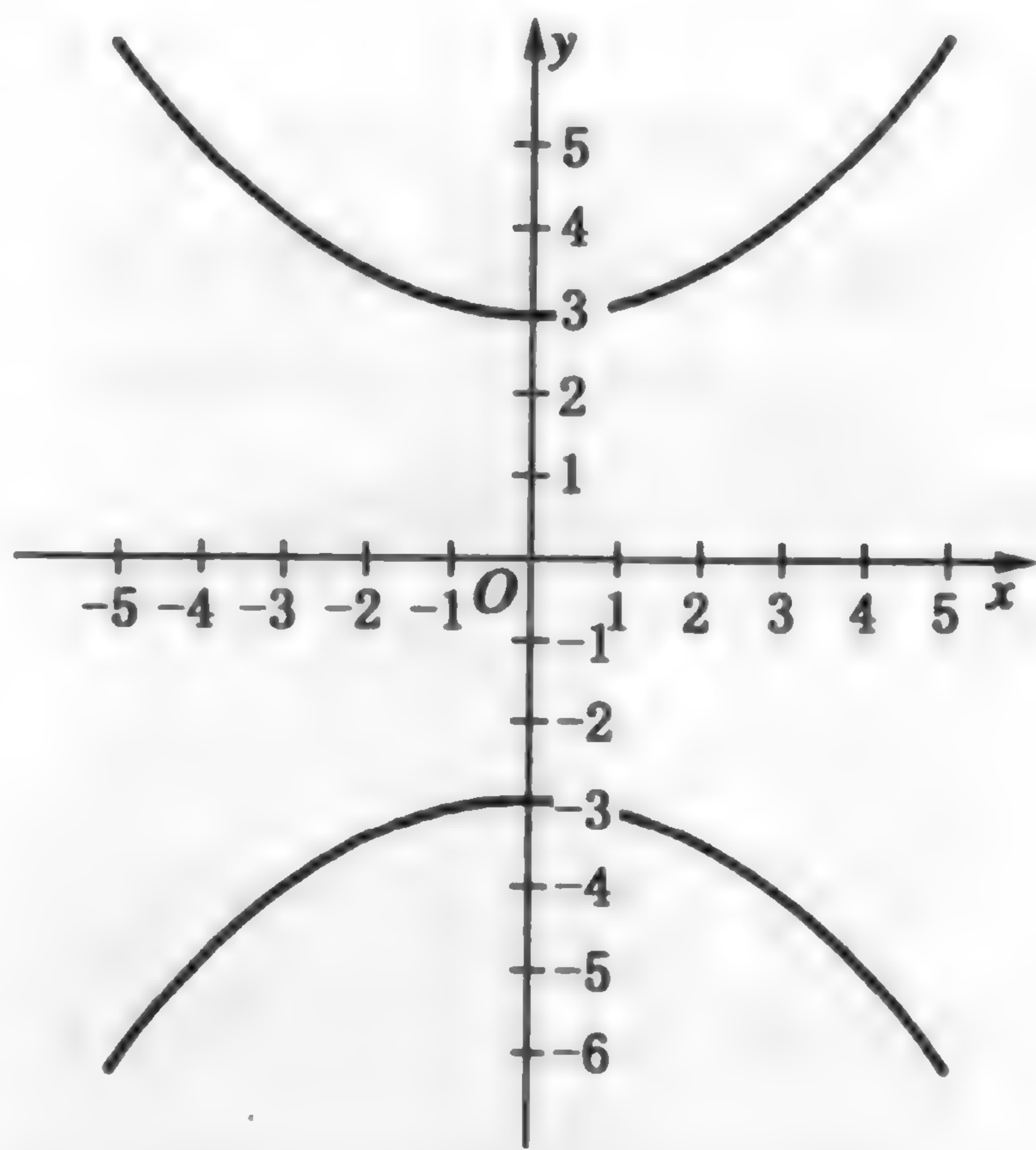


图 7.9 双曲线 $y^2-x^2=9$

作图的故事

有位教授在教室的地板上画了 x 轴与 y 轴，然后每说出一个函数，就叫学生"走"出该函数的图像，他把这种教学法称为"应用数学教学法". 一天，有学生上课时带来了他的狗，教授很生气，对该生吼道："把狗赶出去！我不允许狗进我的教室！"

"但是我的这只狗不是一般的狗，它会画函数图像."

"胡说八道，"教授的态度仍然很坚决："把它赶出去！"

"你不信就自己试试看"，学生说："出个函数叫它画吧！"

"好吧. 我们瞧瞧它怎么画 $y=3x+1$." 教授很好奇.

这只狗还真能干，一听教授说完，马上走到教室的一侧，找好起点，对准了方向，然后飞快跑出一条笔直的线来. 这条线的斜率为 3，y 截距等于 1，居然完全正确，教授跟全班学生都看得目瞪口呆. 它也非常乖巧，一个箭步跳到教授身上，用它那湿漉漉的长舌头，从教授的左耳舔到右耳.

教授非常不高兴，但是没办法，只得掏出手帕擦脸，一面决定出个难一点的题目. 他喊道："$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$". 不料它马上在地板上跑出一个通过 $(-2, 0)$、$(0, -3)$、$(2, 0)$ 及 $(0, 3)$ 诸点的椭圆. 然后它再度跳到教授身上，不顾教授的抗拒，又把他的脸舔过一遍.

全班同学都惊奇得不得了．狗儿的主人一脸神气，大声问道：“还有谁不相信？还有谁仍然怀疑我的狗是天才？还有谁想试试看？”

教室里一片寂静，鸦雀无声．不知过了多久，角落里有位同学举起手来，是一个从未在班上发过言的同学，他怯生生地说：“我想来试试看，不过我怕我的舌头没有狗狗的那么长．”

第8章 极限：你可少不了它们

8.1　基本概念

你知道人们会用什么态度说下面这句话："你真的把我给惹毛了，我的忍耐已经到极限了！"然而你有没有觉得奇怪，"已经到极限"到底是什么意思？

在英文里，limit（极限）这个字通常是指一条不能超越的边界或界限，就像住在美国明尼苏达州的人们，一天下来钓了不少鱼，就会向人说："I' ve caught my limit."意思是说，他若是再多钓几条鱼，叫政府山林管理员查获，他的钓具就会被当场没收．钓客所能钓得的鱼数量，规定必须低于或刚好等于限额，绝对不能超过．

在数学里，当函数中的 x 渐渐趋近到某个定值时，该函数的值也会逐渐趋近一个值，这个值就是函数的"极限"．这个说法可能叫你觉得满头雾水，我们就用一个实际的例子来说明好了．

假设你让鼻子向电风扇靠拢过去，为了容易叙述，我们就说你的鼻尖位置

在 x，而电风扇的位置在 3（或是分别离原点 x 英尺和 3 英尺[①]），如图 8.1 所示.

我们想知道，当 x 非常接近 3 时，会发生什么事——也就是说，当你的鼻尖朝 3 移近，而且愈来愈靠近，但**绝对不要真正到达** 3（你知道那后果该会有多么严重）.

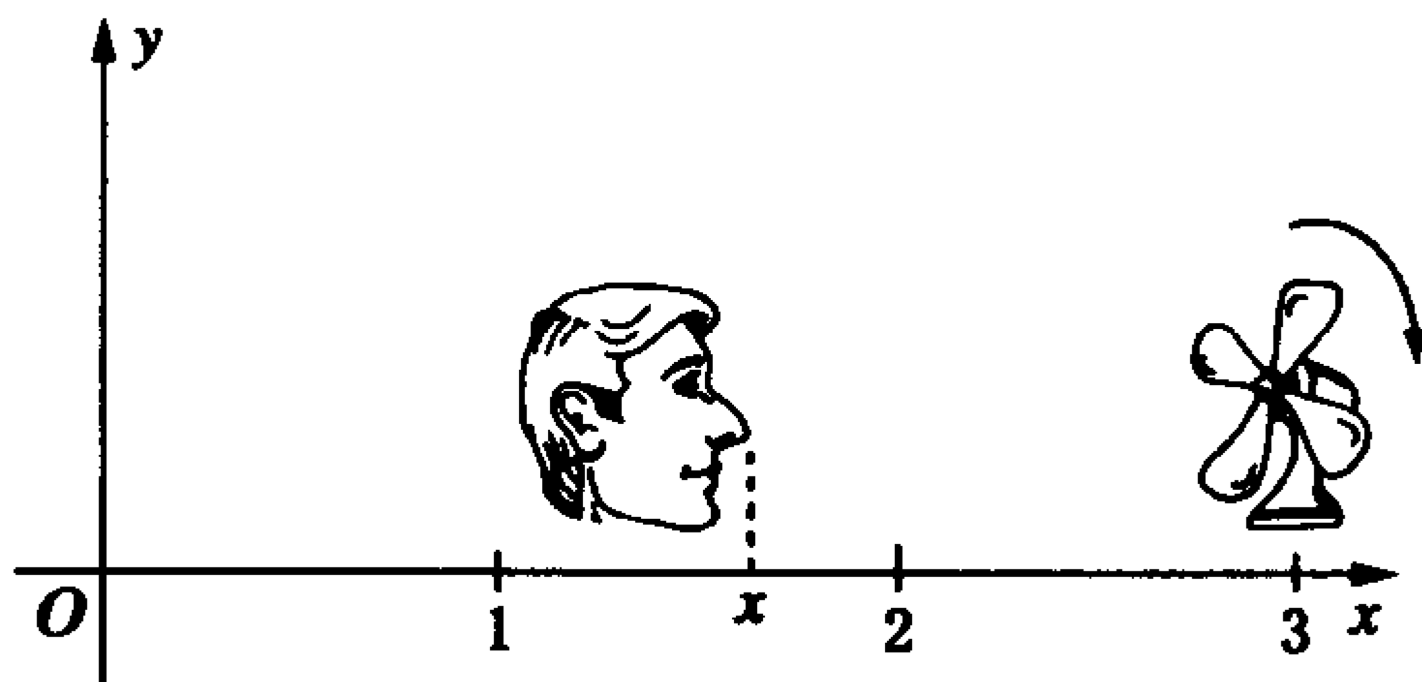


图 8.1 不能掉以轻心的危险极限

这个嘛，会发生的事只是，你会觉得当 x 离 3 愈来愈近，从电风扇吹到你脸上的风愈来愈强. 所以，我们的兴趣在于，当你的鼻子接近 3 时，你感受到的风的强度变化.（我们要取 $\lim\limits_{x\to 3}b(x)$，其中的 $b(x)$ 就是当你的鼻子在点 x 时，所感受到的风的强度.）

假设当 $x=2.9$，你感受到的风速是 6 英里/小时，那么当鼻子向风扇移近，风速就会如表 8.1 那样跟着增加：

表 8.1

鼻子的位置	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999
风速	6	6.7	6.92	6.991	6.999993

从这些数据看来，似乎在鼻子逐渐靠近风扇时，风速就会逐渐趋近于 7 英里/小时，因此我们可以写成

$$\lim_{x\to 3}b(x)=7.$$

身为鼻子受到威胁的当事人，你一定不愿意去发现，$x=3$ 的时候会发生什么事——因为你知道，那可不只是一阵风而已！

---

① 1 英寸＝2.5400 厘米，1 英尺＝0.3048 米，1 码＝0.9144 米，1 英里＝1.6093 千米，1 磅＝0.4536 千克. 本书为带有文学色彩的翻译书，考虑到所举实例及运算式中数值的特殊性，仍保留原单位，以下均此.

这就是极限在数学上的意义与作用．我们想知道，当 x 趋于一个特殊的数 a，函数 $f(x)$的值会发生什么变化．

另一方面，我们也可以从一个函数的图像，去判定该函数的极限．如图 8.2，我们看到两个函数图像，你会发现当 x 从左右两边趋近于 3 时，两函数的值都趋于 7，也就是极限等于 7．虽然图 8.2 (b) 所示的函数，在 $x=3$ 时的值等于 1，而不像 8.2 (a) 的函数值是等于 7，但我们不在乎，因为事实上，在 3 这一点的极限并非取决于函数在该点的值，而只取决于当 x 趋于 3 的那些函数值．

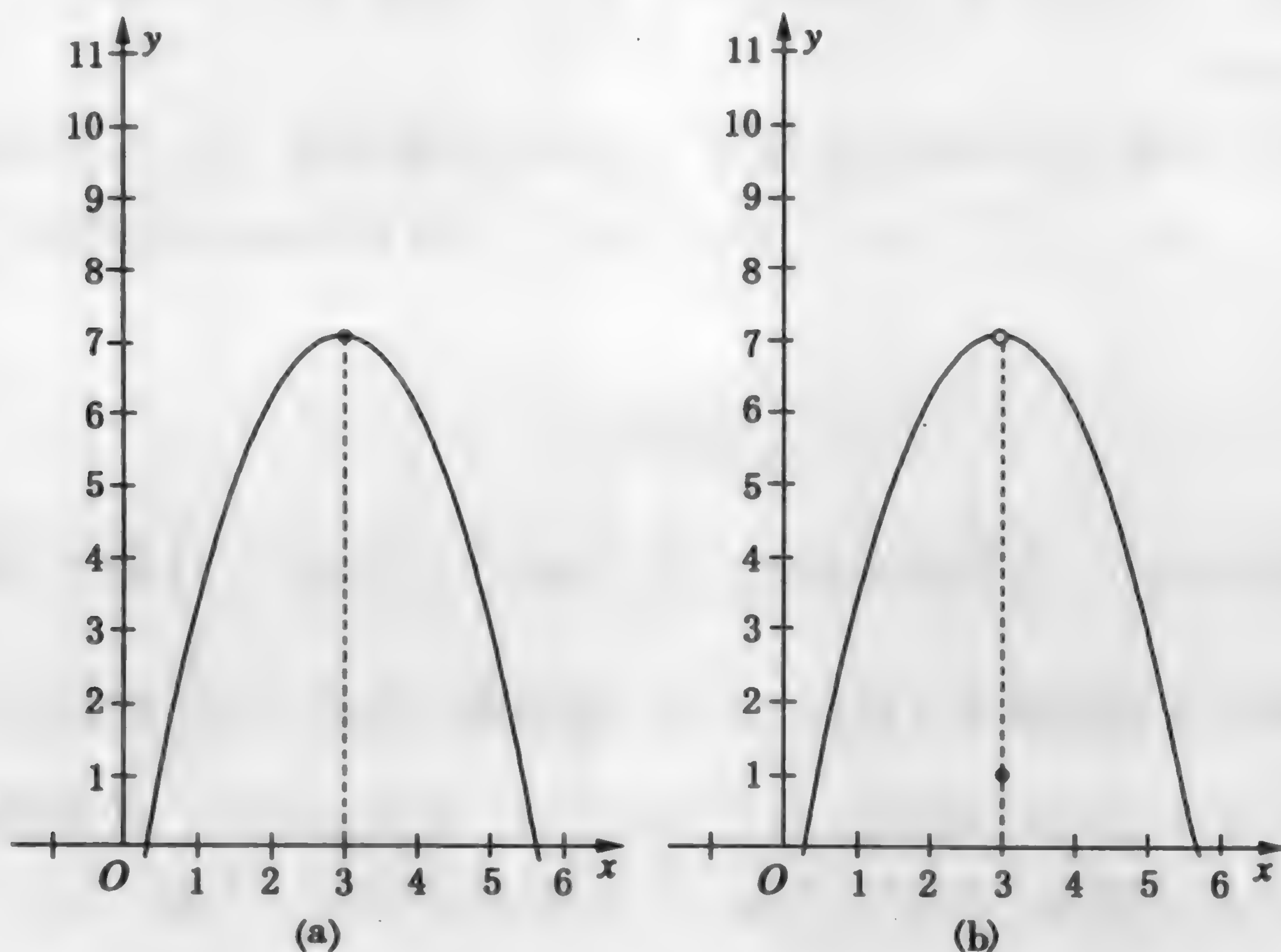


图 8.2　当 $x\to3$，极限等于 7 的两个函数

对于大多数的标准函数来说，取极限值的过程很平常，不会发生什么有趣的插曲．比方说，一个像 x^3-7x^4+3 的多项式，在 x 趋近于 a 时的极限就是 a^3-7a^4+3，直接用 a 代入 x 就可以了．

例题　$\lim\limits_{x\to1}(x^2-7x^3+5)=1^2-7(1^3)+5=-1.$

我们只是用 1 代入 x，就得到答案了！真希望天下事都这么简单就好啦．

但是，想当然耳，不是每个函数都那么简单，我们免不了会碰到一些“问题函数”．就拿下面这个例子来说吧：

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^3},$$

当 x 渐渐靠近 2 时，$(x-2)^2$ 就会变得非常小，但是当 1 除一个非常小的数时，得到的会是个非常大的数，真的是非常非常大！我们称之为无穷大，用符号∞表示．所以，当 x 趋近于 2 时，$\frac{1}{(x-2)^2}$趋近于∞．不过由于∞不能算是个真正的数，所以我们说“该极限并不存在”，就是没有这个数，一个不存在的东西，无解．

所以我们可能得到非常大的极限（比任何实数都要大），大到极限根本不存在．除此之外，我们也会因为其他的原因，而得到不存在的极限，譬如下面这个例子：

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x},$$

当 x 变得愈来愈小，$\frac{1}{x}$就愈来愈大，但是 $\sin\frac{1}{x}$ 永远介于 -1 跟 1 之间，因为任何一个数的正弦值都不会超出 -1 到 1 的范围．因此，当$\frac{1}{x}$愈来愈大，$\sin\frac{1}{x}$ 只是在 -1 跟 1 之间来回振荡，而且愈来愈快、愈来愈疯狂；最重要的一个特点是，它不会渐渐靠近任何一个数，不会集中到任何一个数．所以，它没有极限．

你可以把“有极限”这回事，想成是爱上了一个数．当海誓山盟的关键时刻来临，咱们对这个数的感情就愈深刻（趋近）．但是 $\sin\frac{1}{x}$显然用情不专，它不愿定情于一点，永远在 -1 跟 1 之间振荡不定，所以到最后，落到没有极限的下场，无法与人共结连理．

诀窍　在其他的点，极限不但存在，并且很容易求得．例如

$$\lim_{x\to\frac{2}{\pi}}\sin\frac{1}{x}.$$

上面这个极限就等于

$$\sin\frac{1}{\frac{2}{\pi}}=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

所以说，$\sin\frac{1}{x}$的极限只有在 $x\to 0$ 时有问题，而当 x 趋于其他值时则没有问题.

8.2　取极限的一般步骤

假如我们想要对某一函数 $f(x)$取极限 $\lim\limits_{x\to b}f(x)$，该如何着手呢？

第一步永远是把函数中的 x 用 b 取代．如果我们得到的是一个数（也就是没有 0 当分母，或是没有负数藏在根号内)，而且该函数不是那种具有多重性格的怪异家伙，在 b 点会改变定义，那么，$f(b)$这个数就是我们要找的极限.

对付多项式也是一样，用 b 代入 x 即可．事实上，几乎任何形式的函数，都可以用这个方法，只要你所用的那个点，不会让你除以 0（譬如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$)．这方法就叫做“直接代换法.”

例题　$\lim\limits_{x\to 2}(x^4-6x^3+2)=2^4-6(2^3)+2=16-48+2=-30.$

例题　$\lim\limits_{x\to \pi/4}\sin x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

事实上，对于由多项式组合成的分式（称为有理函数)，直接代换法也非常管用.

例题　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+2}{3x^2+6}=\frac{1^2-4(1)+2}{3(1)^2+6}=-\frac{1}{9}.$

例题　$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-7}=\frac{0}{-4}=0.$

这里得记住的一点是，若是分子出现 0，没问题，但是分母一旦变成 0，就必须小心了．

例题 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$．

这个例子很特别．如果我们照样用 1 代入 x，得到的是$\dfrac{0}{0}$．千万不要一看分子分母相同，就认为答案等于 1．但也不要看到了 0，就认为无解而放弃．

那该怎么办呢？原则上，每当出现$\dfrac{0}{0}$，我们应该再回到原来的函数，试着化简这个分式，目的是希望能消去其中一个 0．现在就来化简一下：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\ (x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

哈，上下两个 0 都不见啦！

$(x-1)\ (x^2-1)$ 这个函数，在 $x=1$ 那一点甚至连个定义都没有，但除此点之外，在其他部分看起来都跟$\dfrac{1}{x+1}$没有两样．但是一到 $x=1$，突然出现了一个洞，如同生命中的一小块真空，一个失去了意义的日子，一段无法弥补的空白．不过，这没啥好慌张的，记得我们在一开头就提过，求极限时，重要的是“靠近”1 的那些点的函数值，而不是落在 1 的实际函数值．

例题 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2}{x^2}$．

如果我们把 0 代入 x，分子就成了 1，而分母变成 0，也即整个函数成了$\dfrac{1}{0}$．这就表示，它的极限不存在（在 x 趋近于 0 时，它的分母愈来愈小，而当我们拿一个愈来愈小的正数去除 1 的时候，结果就是一个愈来愈大的正数，也就是趋于$+\infty$）．

8.3　单侧极限

在此之前，我们还没有太注意 x 如何逐渐靠近一个值．就拿下面这例子来说吧：

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}.$$

x 可能比 2 大，而从 2 的右侧逐渐趋于 2；同样的，它也可能比 2 小，而从 2 的左侧逐渐向 2 靠拢．如果同时考虑两个情况的话，x 就可能碰到严重的麻烦，还有，两种情况下的极限都不存在．不过，我们仍旧有兴趣瞧瞧两边究竟有何不同．

如果我们要让 x 从右边向 2 靠拢，就要写成：

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}.$$

这么一来，$x-2$ 就成了一个非常小的"正"数，而$\frac{1}{x-2}$就成了一个非常大的正数．所以，

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty,$$

而其极限不存在．

反之，如果我们只让 x 从左边向 2 靠拢，就写成

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}.$$

由于 x 小于 2，$x-2$ 就成了一个非常小的负数，所以$\frac{1}{x-2}$就成了一个非常小的负数．所以，

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=-\infty,$$

而其极限同样不存在．

以上这个观念，还可以用电影"侏罗纪公园"里面两只恐龙合作猎食的情景来说明．点 a 可以是一个体形不大的哺乳动物，譬如一只羊，现在，一只霸

王龙 x 静悄悄的从那只羊的左边偷袭过来，这个情景可以写成：

$$\lim_{x\to a^-} L(x).$$

式子中的 $L(x)$ 就是午餐函数．在同一时间，另一只霸王龙 x 也静悄悄的从羊的右边偷袭过来，这就写成：

$$\lim_{x\to a^+} L(x).$$

如果两只恐龙肯合作，分别从羊的两侧偷袭，那么当他们到达 a 时，就可以分享一顿丰盛的午餐，所以我们的结论是，$\lim_{x\to a} L(x)$ 存在，并且等于一顿难得羊排大餐．

> 当我们说极限存在时，是指左右两边的极限都存在，而且相等．

附言　那只羊死定啦！

8.4　怪异函数的极限

数学家为了让生活更多彩多姿，创造了许多复杂的函数，它们的定义不再是单一的式子，而是好几个．当你看到问题里面有一些弯弯曲曲的大括号，就表示你面对的是这种多性格的函数了．我们先前讨论过的绝对值就是其中之一，下面是另外一个例子：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{若 } x<3,\\ x^2-12, & \text{若 } x\geqslant 3.\end{cases}$$

这是啥玩意呀？我们知道，这个函数跟前面提过的所有函数都长得不一样，但是别被稀奇古怪的外表吓倒，其实内容没差多少．我们照样可以把它画出来，得到的图形跟图 8.3 类似．

让我们瞧瞧这个函数的几个极限．

1. $\lim_{x\to 4} f(x)$是多少？对 $x\geqslant 3$，$f(x)=x^2-12$，所以

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}(x^2-12)=4.$$

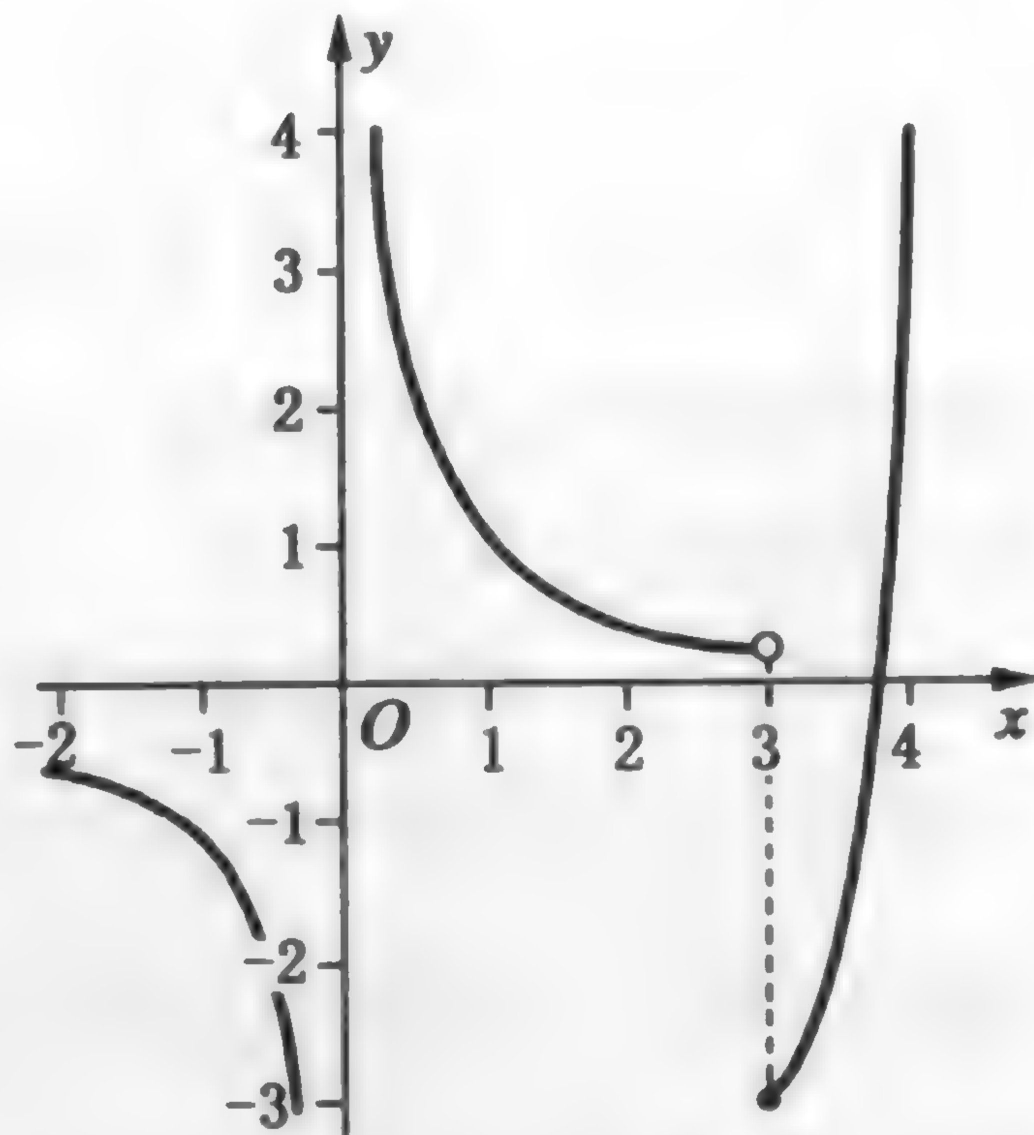


图 8.3　个性会变的函数

2. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$那是多少呢？对 $x<3$，$f(x)=\frac{1}{x}$，所以

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$呢？对 $x\geqslant 3$，$f(x)=x^2-12$，因而 $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=-3$.

4. $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)$又是多少？对 $x<3$，$f(x)=\frac{1}{x}$，所以 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\frac{1}{3}$.

当我们做这题的计算时，$f(x)$在 $x=3$ 那一点的值究竟是多少，根本无关紧要. 别管它，把它忘掉，因为它一点也不会影响到计算.

5. 那 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$呢？这个嘛，我们从前面已经知道，当 $x<3$，极限是$\frac{1}{3}$，而对 $x\geqslant 3$，极限是-3，也就是说，在 3 这点的左右极限不一致. 这情形就好像坐在汽车后座的两兄弟，一路上吵吵闹闹，意见不和，结果爸妈最后不得不把他们硬性分开，叫其中一个坐到前座去——或是像这题的结果，兼顾两侧的极限并不存在.

奇怪但真实的极限　也许你对下面这个问题缺乏兴趣，但是在极限的世界里，它可是一个相当重要的事实：

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

你说奇怪不奇怪，一个像$\frac{\sin x}{x}$这么难看的函数，居然会有像 1 那样美丽的极限. 从大处着眼来看，这样的结果代表什么意义呢？它的意义就是，当 x 靠

近 0（也就是 x 非常非常小），$\sin x$ 的行为会变得跟 x 如出一辙，因而它们的比率$\frac{\sin x}{x}$就变成 1 了．若要了解这一点，最好的办法是同时画出 $y=x$ 与 $y=\sin x$ 这两个函数的图形（如图 8.4）．从图中，我们很容易看出来，当 x 逐渐靠近 0 时，两函数愈来愈相似．

换言之，对于值很小很小的 x，函数 $y=x$ 可以作为 $y=\sin x$ 的一个很好的逼近，它们的比率$\frac{\sin x}{x}$逐渐趋近于 1，也就不足为奇了．

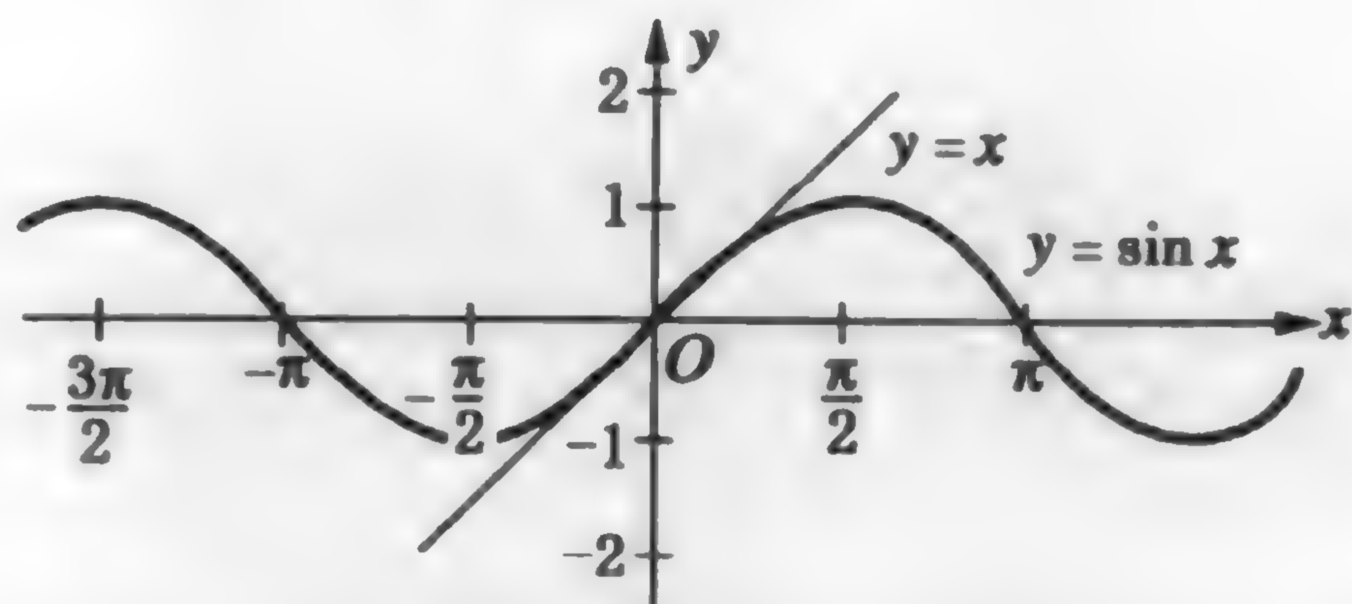


图 8.4　在 $x=0$ 的附近，$y=x$ 与 $y=\sin x$ 看起来很相像

重要技术备忘录　上面这个例子，惟有在 x 以弧度为单位时才能成立，若以度为单位就不行了．在微积分里，凡是看到函数 $\sin x$，其中的 x 都是以弧度为单位．

难题挑战　试解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

怎么办呢？先将分式的分子分母同乘以 5，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}.$$

若 $x\to 0$，则 $5x\to 0$，反之亦然；所以上式也可写成：

$$\lim_{5x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}.$$

令 $z=5x$，于是上式就可以写成：

$$\lim_{z\to 0}\frac{5\sin z}{z}=5\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=5(1)=5.$$

一个拿去问任课老师的好问题　当他（她）提到一些像“当 x 趋于无穷大时的极限”之类的字眼时，你可问他（她）：你所说的“无穷大”究竟是什么？

错误的答案：最大的数，大到不能再大，差不多等于 10^{100}.

正确的答案：“x 的值要多大就有多大”的简单说法.

另一个好问题　当任课老师说出一些像“这个极限没有定义（undefined）”这类的字眼时，你可以问他（她）：“没有定义”是什么意思？

错误的答案：缺乏肌肉线条，肌肉松弛.

正确的答案：不等于任何一个数.

常犯的错误　当你试图求 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$时，你拿 a 代入 x，有时就会得到一个看来像是$\frac{0}{0}$的分数，表示在这个时候，你还无法知道这个极限是多少或是存不存在. 但许多人一看到这个分数，就误认为此题的极限不存在，这是不对的，更糟糕的错误则是，把上下两个 0 互相抵消而得到 1. 事实上，$\frac{0}{0}$的出现是在告诉你，解题尚未成功，同学你仍须努力，而努力的重点通常是做一些化简. 不妨牢记 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x}$这个范例，只要你一做化简的运算，答案 3 即刻显现出来. 一般说来，如果你得到的是像$\frac{3}{0}$之类的分数，你就知道这个极限是无穷大；要是你得到$\frac{0}{3}$，极限就是 0；若得到$\frac{0}{0}$，则你啥都还不知道，解题的工作尚待完成.

8.5　计算机与极限

我们知道，所谓的极限，就是当 x 趋近于某一个 a 值时，函数 $f(x)$所趋近的一个值，所以我们应该可以使用电脑或计算机，实际去求出当 x 趋近于 a 时，$f(x)$所趋近的极限.

比方说，我们用计算机，把一连串靠近 0 的值（如 1，0.1，0.01，…）代入$\frac{\sin x}{x}$里的 x，就能够看出 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$可能等于 1. 我们从计算机显现的数据就能看出，它们愈来愈靠近 1.

以下是一个简短程序，可叫计算机做 8 次这种计算.

用来估算极限的程序范例：

1. $A=0$
2. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$
3. FOR k = 1 TO 8
4. $A=f(10^{1-k})$
5. PRINT A
6. NEXT k

这个程序命令计算机把 8 个渐渐靠近 0 的 x 值，依序代入函数$\frac{\sin x}{x}$，算出答案并一一列出．从列出的函数值，你会发现这些值很迅速地向 1 靠拢．事实上，你可以把这个程序稍做修改，用在所有的极限问题上．

第9章

续性，或你为何不该在不连续的坡道上滑雪

9.1　概念

在日常生活中，美国佬说：“Hey, let’s get some continuity here”，其意思就是“照规矩来，别出花样”，也就是不希望状况每 4 分钟就出现巨大变化；总没有人会希望公司一下子就把全部员工炒鱿鱼，换上一批新手，一般人都希望一切事情按正常现状继续进行，不至于中断．这“不中断”3 个字，就是连续性的意义所在了．如图 9.1 所举的例子，如果一个函数能够不中断的继续下去，我们就说它是连续的．

当我们画这些图像时，笔尖用不着离开纸面，一笔到底、一气呵成．但是图 9.2 里面的两个图像就不一样了，我们不能用一个连续动作把它们画出来．这两个图形都是在 $x=2$ 的那一点出了问题，对此，我们就说该函数在 $x=2$ 是“不连续的”．

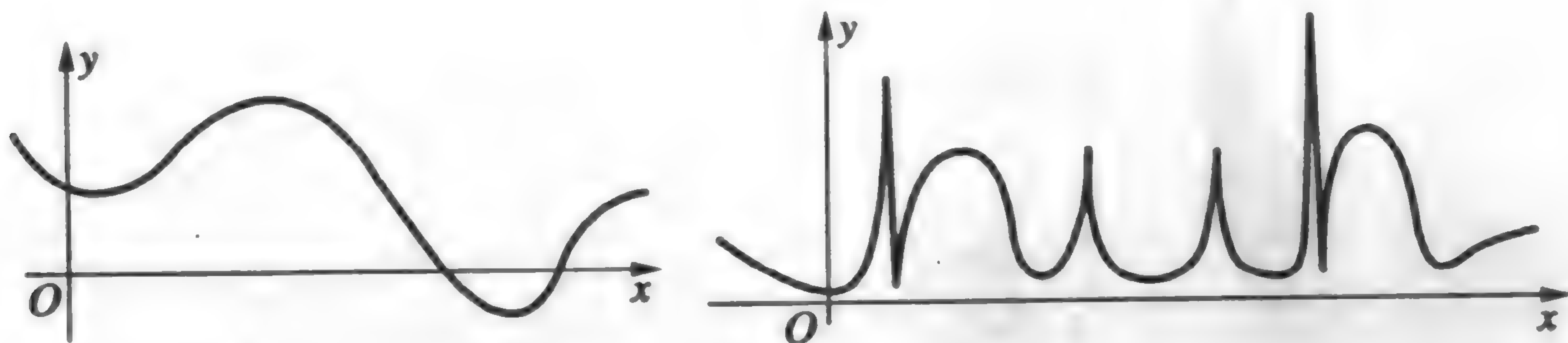


图 9.1 连续函数

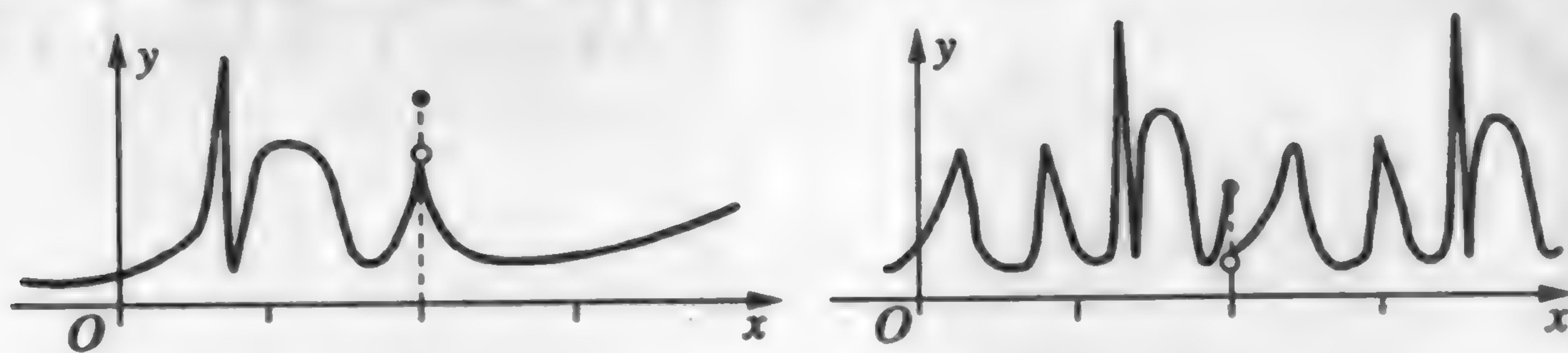


图 9.2 两个不连续的函数：左边的缺了一点，右边的错开了一步

9.2 连续性的 3 个条件

现在我们要来正式定义“连续”了．看到这个定义包含了 3 个部分，你就知道它非同小可．

定义 $f(x)$在 $x=a$ 是连续的，条件有三：

1. $f(a)$是有定义的．
2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在．
3. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$．

让我们瞧瞧上面这 3 点究竟讲的是啥．

* 条件 1 的意思是，我们所考虑的这个点 $x=a$ 的确落在此函数定义域内．如果函数 $f(x)=\sqrt{x}$，我们就不能问它在 $x=-4$ 是否连续，因为这个函数在负数上根本没有定义．

* 条件 2 的意思是说，当 x 从 a 的左右两边向 a 趋近时，该函数的值会向

某个值趋近.

* 条件 3 说的是，$f(x)$所趋近的那个值，就等于它在 a 那一点的函数值.

现在让我们看看，这些条件各处在什么情况下不成立. 从图 9.3 所显示的函数图形，你会看到该函数在 $x=2$ 那一点上有定义，也有极限存在，但是函数值与极限偏偏不相同，所以条件 3 不成立，也就造成该函数在 $x=2$ 不连续：函数一路走来到达 2 时，暂时跳离了原来的路线，然后又跳回到老路上.

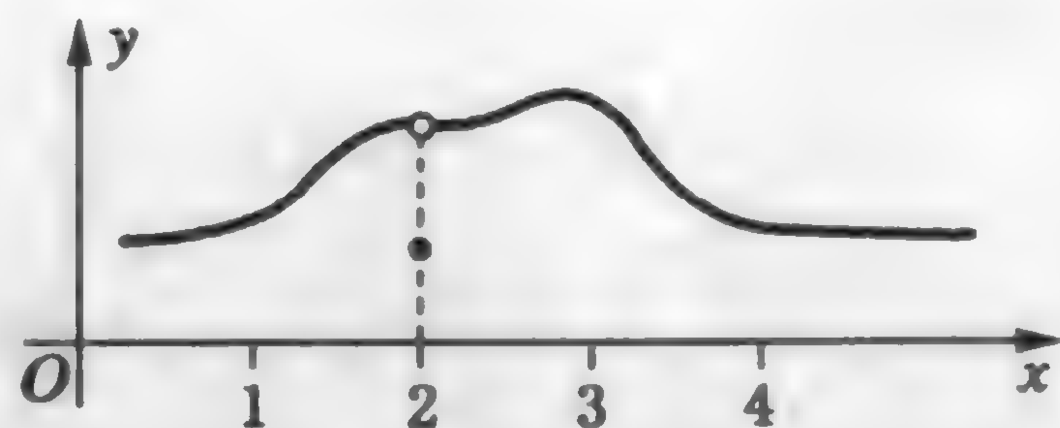


图 9.3　缺了一点的不连续函数

在图 9.4，我们同样看到函数在 $x=2$ 有定义，但极限不存在，因为从 2 的两侧求得的两个极限并不相同，所以条件 2 不成立.

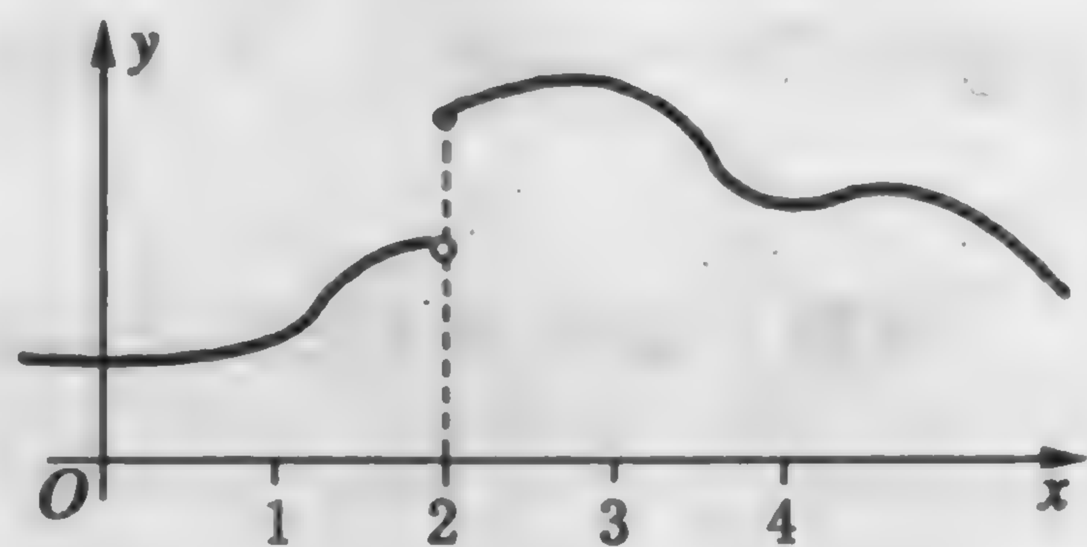


图 9.4　错开了一步的不连续函数

最后在图 9.5 中，屋顶开了天窗，函数在 $x=2$ 不但没有定义，极限也不存在. 这次我们看到，图像两半的线条一直往上延伸，到了页面之外还不会相交. 对这个函数，3 个条件统统不成立.

如果函数的图像完全没有缺口，那么该函数对所有的 x 就都是连续的，也就是在各处都是连续的. 那么，什么样的函数会具有这种不危及滑雪者的性质呢？

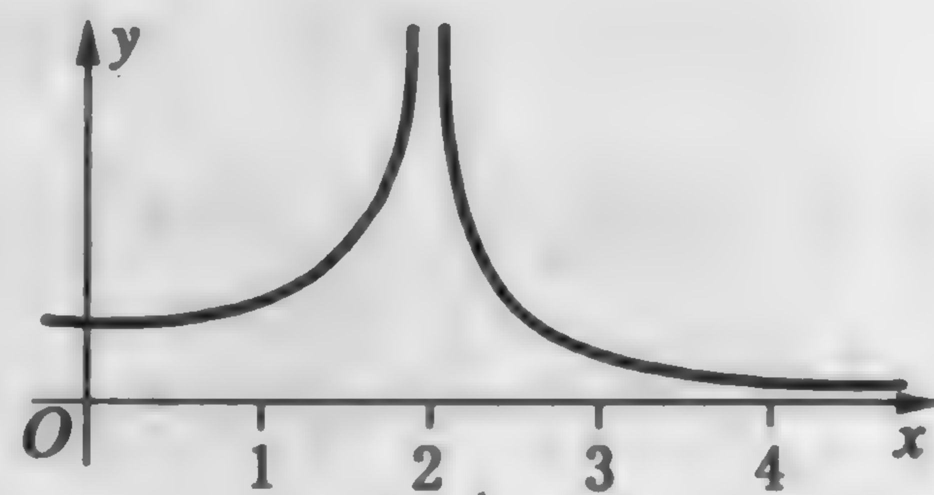


图 9.5　具有一个无穷大极限值的不连续函数

像 x^5 或 $2x^3+5x^2-3x+8$ 这样的多项式，就是处处连续的，$\sin x$ 跟 $\cos x$ 也是一样. 绝对值函数也处处连续（即使有急拐弯的地方），因为画函数图像的时候，你用不着把笔尖抬离纸面. 至于多项式分式 $\frac{p(x)}{q(x)}$[其中的 $p(x)$跟 $q(x)$都是多项式]，在

$q(x)$不等于 0 的所有点 x，也就是在有函数值的所有点，都是连续的（我们有时叫这种函数为有理函数）．譬如$\frac{x^2-1}{x+3}$，除了 $x=-3$ 之外，在其他各处都是连续的．

此外，$\tan x$、$\sec x$ 及 $\csc x$ 这 3 个函数，在它们有定义的部分是处处连续的，但并不是在所有的 x 上都如此．所以，$\tan x\left(=\frac{\sin x}{\cos x}\right)$在 $\cos x=0$ 以外的点都是连续的，而这些不连续的点就是 $x=\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{3\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{2}$，…

简言之，你每天面对的所有标准函数，在它们有定义的地方就是处处连续的．所以，简单明了，“某某函数在何处是连续的？”这个问题的答案，几乎永远是“凡是某某函数有定义的地方”．

但是，这条规则会有例外，那就是当我们碰到多重性格函数的时候．这种函数在不同的 x 值上，有不同的定义，因此我们得逐一检查每一个分界点．

例题 试找出下面这个函数的不连续点：

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x\leqslant -1,\\ x+1, & \text{如果 } -1<x\leqslant 0,\\ x^2, & \text{如果 } 0<x<1,\\ 1, & \text{如果 } x=1,\\ \frac{1}{2-x}, & \text{如果 } 1<x.\end{cases}$$

由于$\frac{1}{2-x}$仅有一个明显的缺口，因此上面这个函数除了 $x=2$ 以外，在其余各点都有定义．用来定义这整个函数的各个函数，也就是 0、$x+1$、x^2 以及$\frac{1}{2-x}$，在各种有定义的地方就是处处连续的，所以对 $f(x)$的连续性，我们需要检查的就只有位于这些函数分界的几个点，即 $x=-1$，$x=0$ 跟 $x=1$．

首先让我们瞧瞧 $x=-1$：

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} 0=0,$$

而

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x+1)=-1+1=0,$$

左极限跟右极限相等，所以极限存在．另外，由于在 $x=-1$ 处函数值等于 0，所以

$$\lim_{x\to -1} f(x)=0=f(-1).$$

因此这个函数在 $x=-1$ 处，满足了连续的 3 个条件，故 $f(x)$ 在此处是连续的．

其次来看 $x=0$：

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1,$$

而

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2=0.$$

在 $x=0$ 这个点，左极限与右极限均存在，但显然并不相等，所以极限不存在．所以我们说，$f(x)$ 在 $x=0$ 不连续．

最后看看 $x=1$ 的情形：

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1,$$

而

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2-x}=1,$$

左右极限相等，表示这一点上的极限存在．又由于函数值在 $x=1$ 等于 1，即：

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1=f(1).$$

所有 3 个条件都成立，因而我们说该函数在 $x=1$ 连续．

所以，最后的结论就是，此函数除了 $x=0$ 跟 $x=2$ 两点之外，在其他任何点都是连续的．图 9.6 就是此函数的图形．

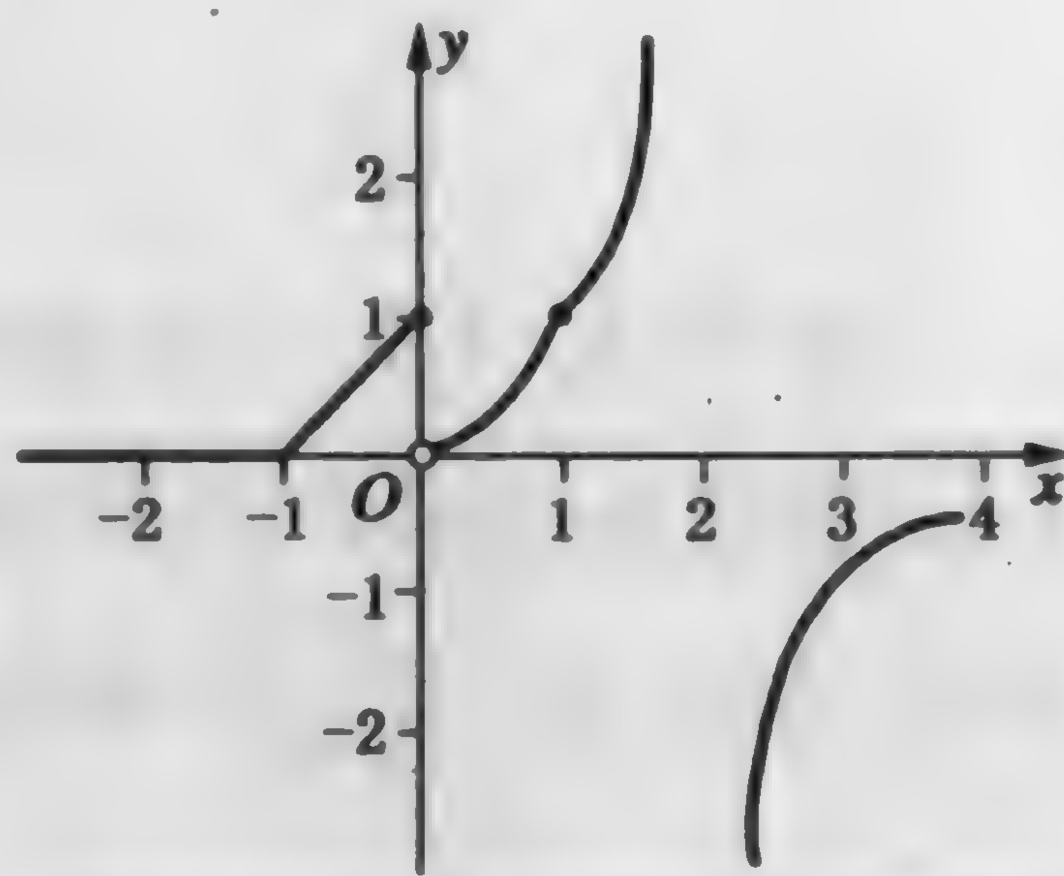


图 9.6　一个不连续函数；函数中有一个断层和一个缺口，函数在这个缺口变成正无穷大

例题　试判定函数 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ 在何处是连续的．

当我们面对这个函数时，注意到的第一件事情就是，在 $x=2$ 的时候，分母等于0. 好！光这一个事实就足以告诉我们，这个函数在 $x=2$ 不连续，因为在这一点上，此函数没有定义！也就是说 $x=2$ 压根儿不在此函数的定义域内. 那么其他的点呢？

从外表看起来，此函数虽然不像是分段函数，但事实上它只是做了伪装而已. 让我们用前面讲到的绝对值函数定义，把这个函数重写成下面这个比较明显的形式：

$$\frac{|x-2|}{x-2}=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-2}, & \text{如果 } x-2>0,\\ \dfrac{-(x-2)}{x-2}, & \text{如果 } x-2<0.\end{cases}$$

你可能会注意到，当 $x-2>0$ 与 $x-2<0$ 时，函数都有定义，惟有 $x-2=0$ 那一点例外. 换句话说，$x=2$ 这一点不在定义域内，因而函数在该点没有定义.

我们可以把上式化简成：

$$\frac{|x-2|}{x-2}=\begin{cases}1, & \text{如果 } x-2>0,\\ -1, & \text{如果 } x-2<0.\end{cases}$$

$x-2>0$ 的另一个写法是 $x>2$. 同理，$x-2<0$ 可以写成 $x<2$. 也就是说，我们这个看起来很吓人的函数其实就是：

$$\frac{|x-2|}{x-2}=\begin{cases}1, & \text{如果 } x>2,\\ -1, & \text{如果 } x<2.\end{cases}$$

我们知道，1 跟 -1 是连续函数，所以总括来说，函数 $\frac{|x-2|}{x-2}$ 除了在 $x=2$ 处不连续外，在其他点都是连续的. 还有，由于在 $x=2$ 处左右两极限并不相同，所以 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$ 也不存在.

第10章 何谓导数，变才是硬道理

好了，现在我们终于讲到了微积分观念的精髓，这可是进入微积分初步里面最重要的一个单元．何谓导数？为何大伙把它看得那么重要？又为什么几乎每一个修过微积分的人，都对这个简单的概念闻之色变？

说穿了，导数这玩意儿真的相当简单，一言以蔽之，就是“斜率”．

例题（抓羊） 假设你即将背着一只打了麻醉药的羊，走上山坡．我们先把山脚下位置的坐标设定为（0，0），即原点，当你从山脚走上山坡的时候，你的 x 坐标与 y 坐标都同时随着你的移动而改变，事实上都在增加．让我们取 $h(x)$ 为在 x 点上的山坡高度，所以函数 $h(x)$ 的图像，也就是满足方程式 $y=h(x)$ 的点所连成的曲线，就是这个山坡的轮廓，如图 10.1 所示．

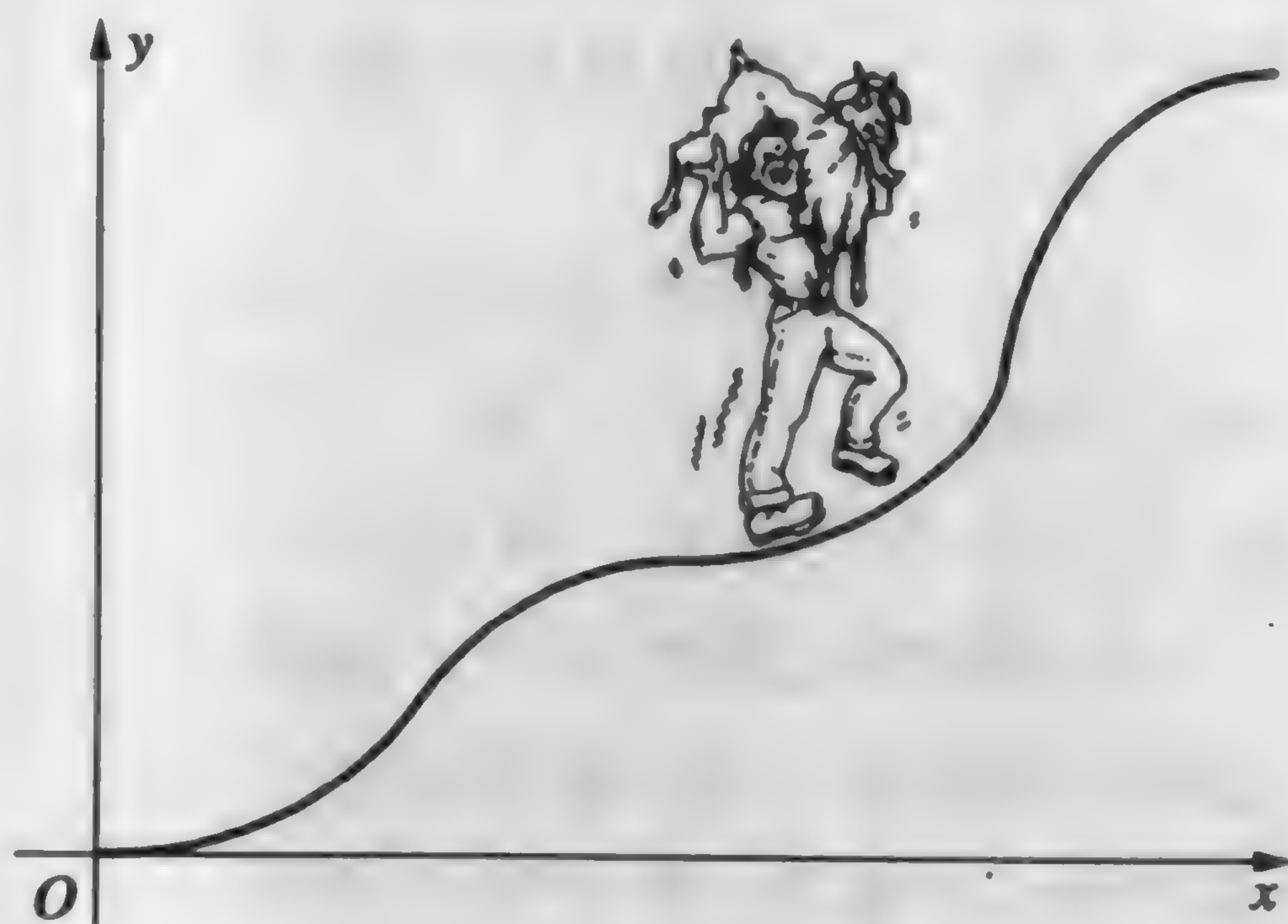


图 10.1　以函数 $h(x)$ 表示山坡的高度

由于你是背着一只羊爬坡，所以你最关切的是你走过的任意一点的陡峭程度，因为愈是陡峭，坡就愈难爬．函数 $h(x)$ 的导数，正是这个山坡在 x 点的陡峭程度，我们以 $h'(x)$ 来表示．

譬如说，我们假设 $h'(10)=\frac{1}{6}$，这就表示你在 x 方向上走了 10 英尺之后，到达的新位置的陡峭程度等于 $\frac{1}{6}$．而所谓的陡峭程度 $\frac{1}{6}$，是反映你在水平方向每移动 1 英尺（差不多一小步的距离），你必能垂直向上移动 2 英寸，这样的坡度还不算陡．

不过，如果我们假设 $h'(20)=5$，那么当你在 x 方向上走了 20 英尺时，会发现你脚下的地点非常陡峭．有多陡呢？相当于每向水平方向横移 1 英尺，你就能上升 5 英尺！这时你恐怕需要一套登山装备，另外还需要替那头羊准备一个绞盘．

如果再假设 $h'(30)=-2$ 呢？那就是说当 $x=30$ 时，你脚底下的地面是每横移 1 英尺，就会在垂直方向移动 -2 英尺．换句话说，你正在下坡，这时你只要让那头羊滚下山坡就得啦（如图 10.2 所示）．

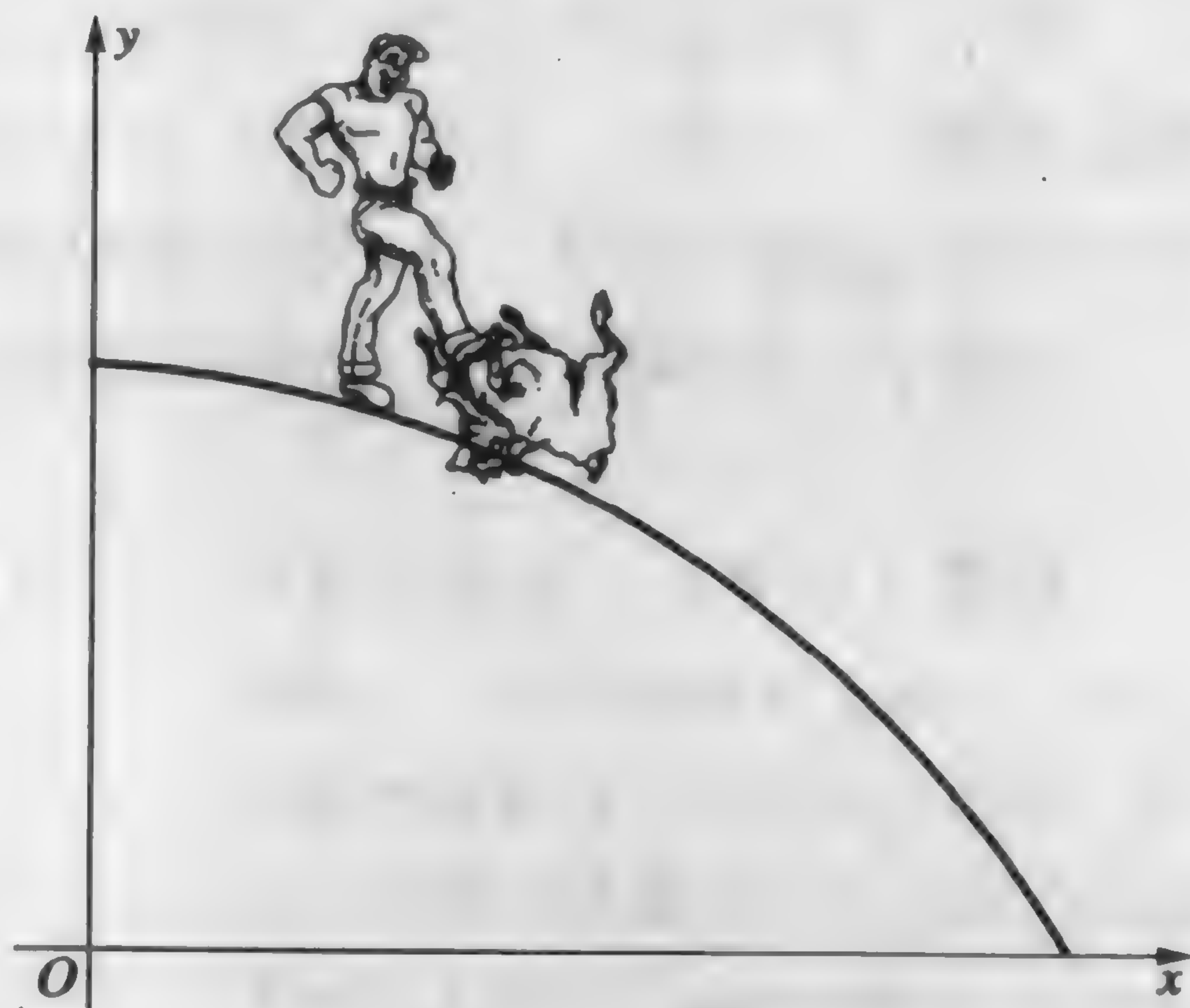


图 10.2　下坡，羊可要倒霉了

当然，导数的功用不限于用来把麻醉过的羊扛上山坡，它们还可以应用在更为一般的状况下，比如麻醉过的绵羊啦，麻醉过的土拨鼠啦，甚至麻醉过的小型美洲水牛等等．除了对上述用来测一只羊的海拔高度的函数外，导数更可以用在许多其他的函数上．

例题（猫头鹰）　假设你的工作是在推销塑胶制的猫头鹰，另外有一群塑料草坪装饰专家（一群 MBA），帮你决定出一个利润函数，可以从每只猫头鹰的售价算出你将得到的利润. 你想用这个函数，定出一个最合适的单价，目的是要使你的利润最大.

换言之，你所要知道的就是，这个利润函数会在何处到达最高点. 如果把函数图像画出来，你会看到这个最高点就在此函数既不增加也不递减的一瞬间（见图 10.3）. 就在一刹那，函数的变化率等于 0. 若用让人肃然起敬的数学术语来说，就是“在最高点的导数为 0”. 够简单了吧！知道了这个重要的事实之后，我们就可以用它来找出最高点，定出这些耐磨损猫头鹰的最佳售价.

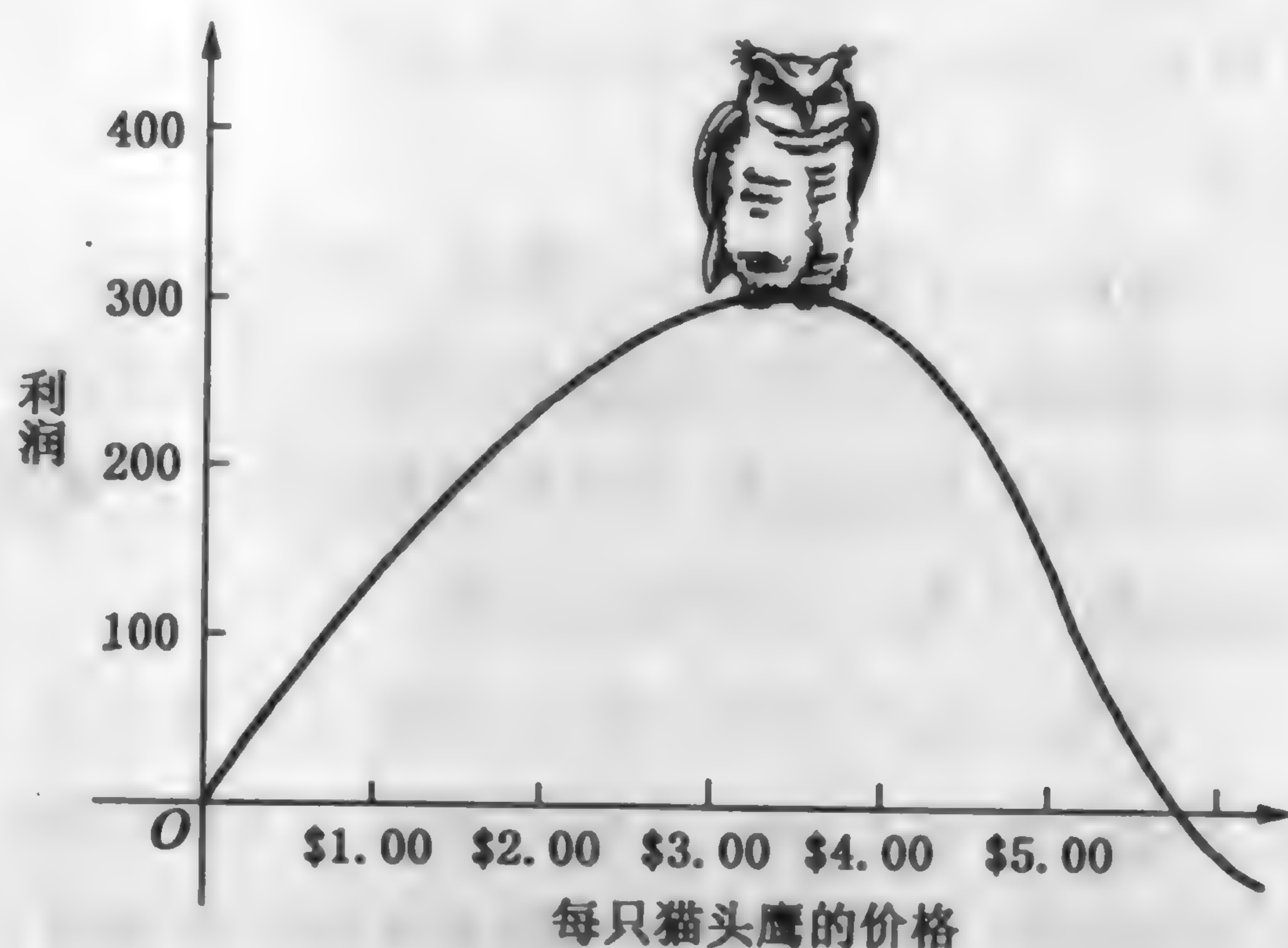


图 10.3　猫头鹰利润函数

例题（车赛）　在第三个例子中，我们假设你正在参加一场高速车赛. 你坐在你那辆超大马力、烧汽油跟喝水似的赛车驾驶室里，在起跑线蓄势待发，引擎一阵阵不断怒吼. 比赛一开始，函数 $f(t)$ 就会告诉你，你的车子在 t 时刻，离开起跑线的距离，而 $t=0$ 就代表鸣枪开赛的一霎时.

在这种比赛场合里，你最关心的当然是你的车速——无怪乎每辆汽车都少

不了车速表．然而，速率不就是位置的变化率吗？就好像“每小时 110 英里”，指的就是速率，是在某一单位时间内移动的距离．如果 $f(t)$是个位置函数，那么导数 $f'(t)$就是该位置函数的变化率，正好就是速率．在你的车赛过程中，车速一直在变．开始的一刹那，车子还在起跑线后面，速率是每小时 0 英里；然后车子冲了出去，速率也愈来愈快，一直加速到车子的最高速率，每小时 130 英里；而当车子冲过终点线，车尾射出减速伞，车子就又减速到停止下来．

所以，在整个车赛过程中，你的导数从 0 上升到 130，然后再下降回到 0．车速表的用途只是在随时告诉你，你在任何一个时间的位置的导数为何．因此，车速表也可以称为“导数显示计”，只是念起来稍微拗口了一些，而且也会占满汽车零件目录里的篇幅．

假如在比赛开始之前，你由于紧张过度，不知不觉把车子误放在倒挡上，结果会怎样呢？哈！当红灯变绿，比赛开始，你的左脚离开离合器，右脚把油门踩到底，然后你就会发现车子向后喷射了回去．当然，如果你只是一个劲地盯着眼前的车速表，你还不会察觉是怎么回事呢，因为那个蠢玩意儿向来不显示负的数值．你的车速实际上是每小时－130 英里，方向与你预期的恰恰相反！如果你发现车子是在后退，那是因为你从后照镜里看到你的技师们的惊恐脸庞，正以惊人的速率在变大．这时你可以说，你的位置函数的导数为－130．

快速复习　到目前为止，本章的重点是要你明白一个概念，那就是：函数 $y=f(x)$的导数 $f'(x)$，表示该函数的变化率．如果导数是个很大的正值，表示该函数正在疾速递增；如果导数是个相当小的正值，表示函数也在递增，只是递增得很缓慢．若导数是负值，表示函数在递减，如果导数等于 0，表示函数至少在此瞬间是既不递增、也不递减，维持水平——它正在犹豫不决，哪儿都不去．

好啦！导数就是这么回事儿．但是当然，我们还漏掉了一个非常基本的问题，那就是如何算出导数．譬如说，你要如何测量出山坡有多陡呢？其实，陡峭程度跟斜率意义相同，所以这个问题就是想要把山坡上每一点的斜率都算出来．但正如图 10.1 与图 10.2 所示．我们是用一条曲线来代表山坡的，而且我们只知道如何测量直线的斜率，对于曲线还没有办法．

所以，我们势必得先画一条直线，用以代表曲线（山坡）在某一点上的斜率，而这条直线的斜率就是导数了.

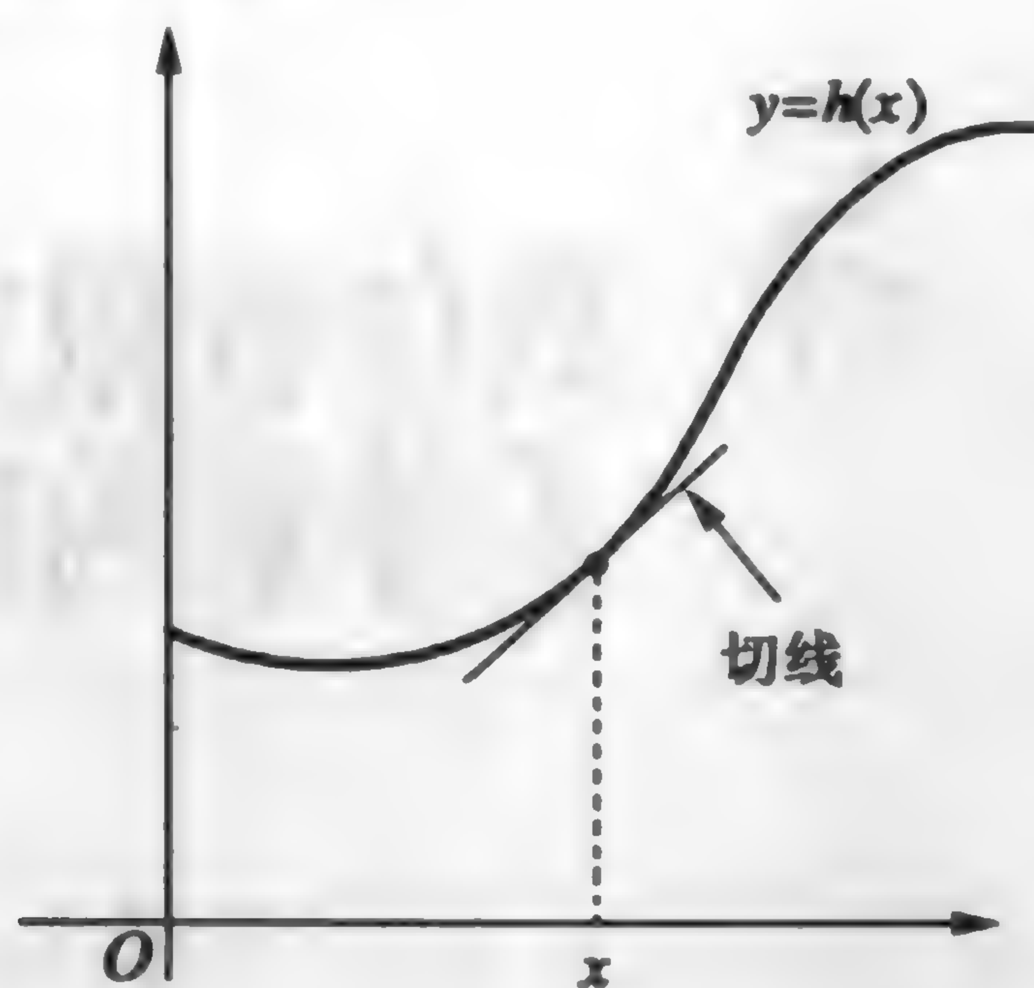


图 10.4　在点 $(x, h(x))$ 上的切线斜率，就等于该点的陡峭程度

如图 10.4 所示，在点 $(x, h(x))$ 跟山坡相接触、而且斜率就等于山坡在该点的陡峭程度的直线，称为“切线”. 下一步我们要讨论，如何实际计算出切线的斜率.

第11章

导数的极限定义：求导数的麻烦方法

11.1 定义导数

现在我们要进一步解释导数的正式定义，而且不再使用前面那种模糊的说法，如“导数是用来度量函数的变化有多快的”，或者是有关斜率的各种类比．没错！我们现在要很明确，绝对明确．

开头第一个问题是，我们究竟要用导数来度量什么？这个嘛，我们的确是要用它来度量函数的变化到底有多快．但这到底是什么意思啊？我们来看图11.1里的两个函数 $y=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像．

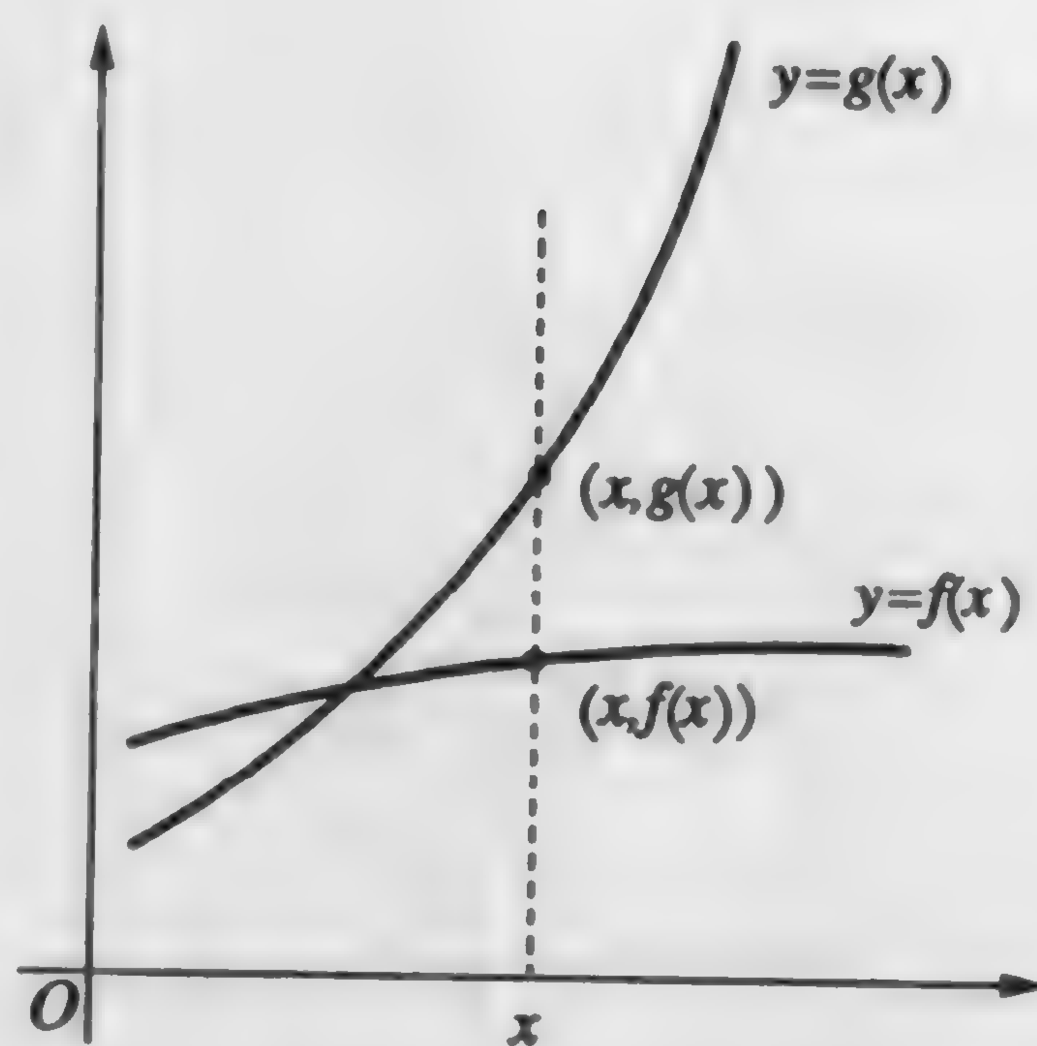


图 11.1 在给定的点上，两个函数的图像究竟有多倾斜呢？

请注意，x 轴上标示着一点 x，而且 $g(x)$ 的图像随着 x 而增加的程度，远较 $f(x)$ 的图像大得多．如果这两条曲线都代表长时间下来的利润函数，那么我们铁定非常喜爱 $g(x)$，原因是 $g(x)$ 陡峭得多，意味着利润会增加得相当快．

当然，光这样比较，仍然不够明确，我们还想知道自己的利润究竟增加得多快，如何才能在家人团聚一块吃年夜饭时，说出明确的数字，让众亲戚刮目相看．换句话说，我们想知道如何精确度量出函数图像在 x 那一点的斜率．

山坡的陡峭程度也可称作坡度（斜率），所以我们真正要度量的，就是函数图像在 x 那一点的斜率．

但是，曲线的斜率到底是指什么呢？我们只知道怎么去解释直线的斜率．所以，我们得先取一条通过点 $(x, g(x))$ 的直线，让它的倾斜程度与该曲线相同，然后度量出这条直线的斜率——我们将在此当做该曲线的斜率．

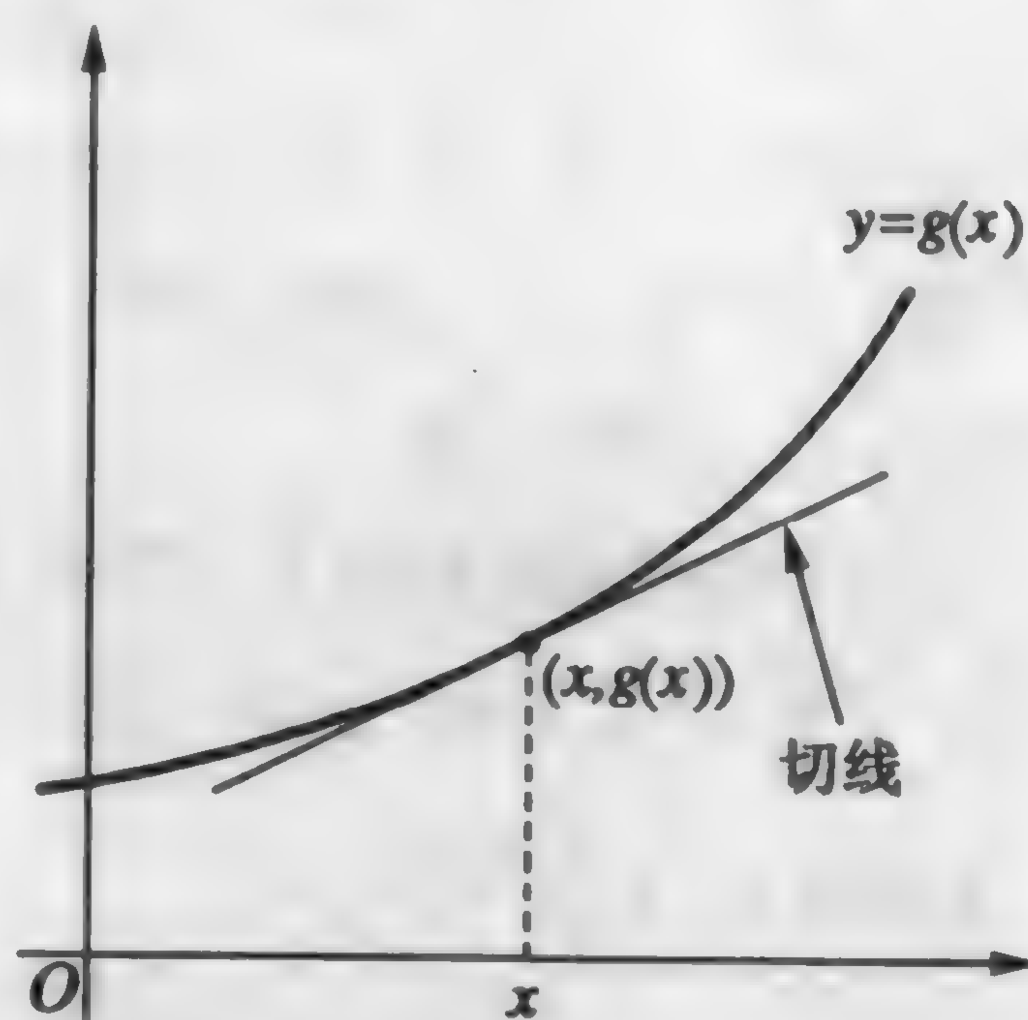


图 11.2　切线之斜率，与函数图像在点 $(x, g(x))$ 的斜率相同

我们要找的直线，会与函数曲线在点 $(x, g(x))$ 附近依稀近似，我们称这条直线为曲线的切线（见图 11.2）．

所以请记住，函数 $y=g(x)$ 在 x 的导数，正好就等于函数曲线在点 $(x, g(x))$ 处之切线的斜率．

当然，有个不错的问题是："通过 $(x, g(x))$ 的直线可能有无限多条，你凭什么知道那一条切线？"我们先瞧瞧，在该点与曲线相关的任何一条直线，是否都是切线呢？显然不是．图 11.3 就显示了这样一条直线，但一看就知道它绝不是切线．

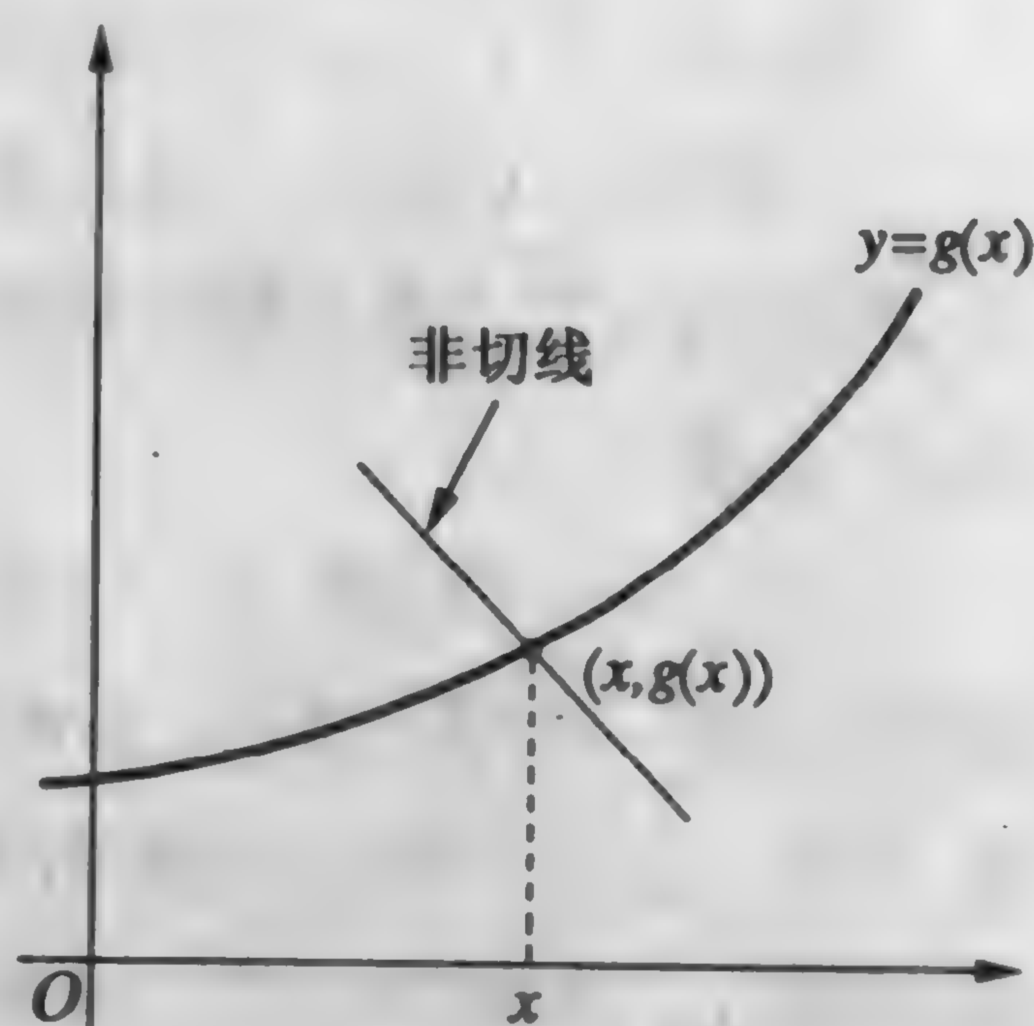


图 11.3　跟曲线相交于一点的直线，不见得是切线

看来我们在定义切线的方法上，也不能打马虎眼，必须非常小心从事．那么切线到底是什么样的直线呢？我们所希望的切线是，直线刚好在某一点上轻碰到函数曲线、而且跟曲线的走向一致．

让我们试试下面这个主意！如图 11.4

所示，在 x 点右边不远处（距离为 h）另取一点，然后在此点的正上方，找到了曲线上的另一点，因此这点的坐标是 $(x+h,\ g(x+h))$.（请牢牢记住，函数图形上任何一点的 y 坐标，都一定等于该点的 x 坐标代入函数之后得到的函数值，否则这个点便无法落在函数图像上了）.

现在，我们画一条直线，让它通过这个点及原先的 $(x,\ g(x))$. 这条直线并不是我们要找的切线，不过它已经相当接近我们所要的切线了. 这条直线，我们称之为“割线”，以 S 来代表.

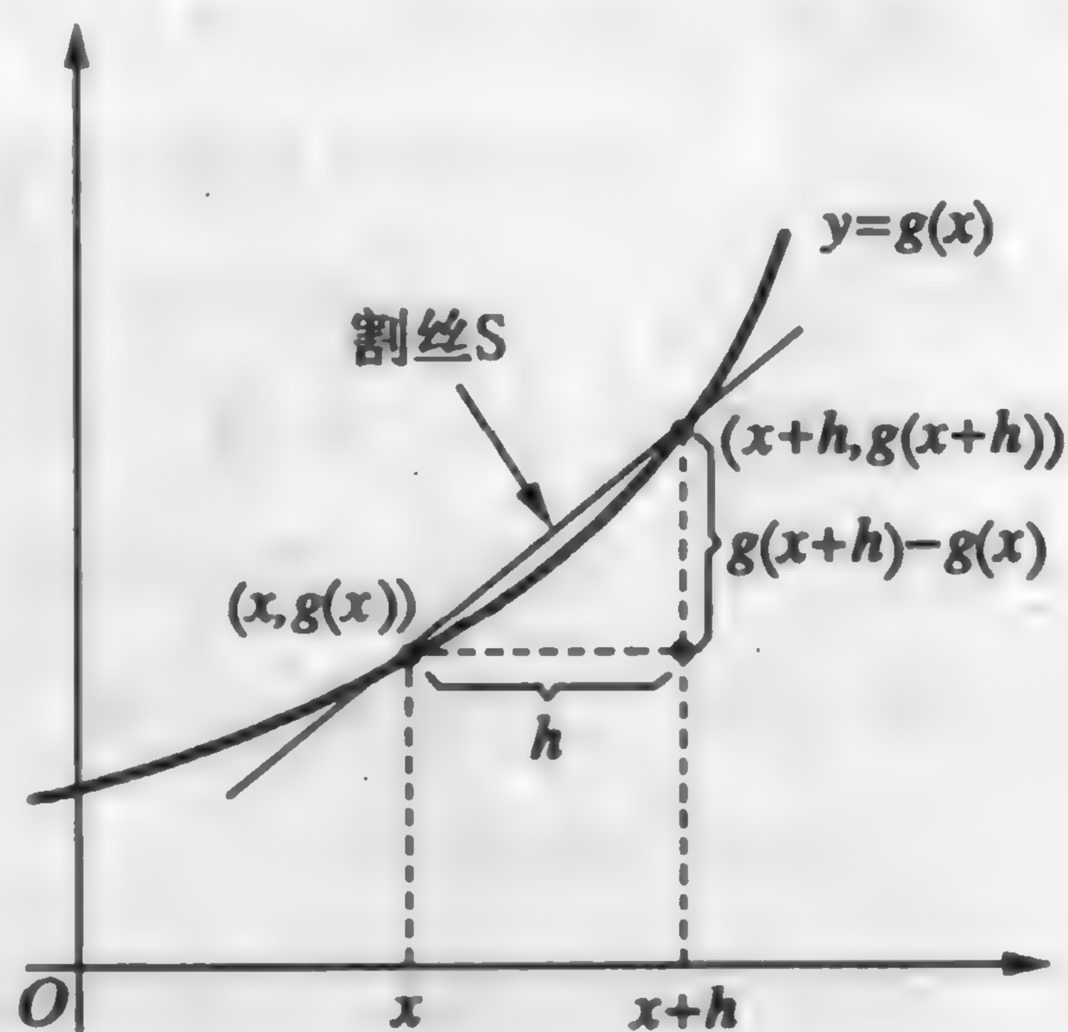


图 11.4　通过点 $(x,\ g(x))$、斜率与切线斜率近似的割线

这条割线的斜率是多少呢？我们来计算一下［我们把它称作斜率 (S) 好了］：

$$
\text{斜率}(S)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{g(x+h)-g(x)}{(x+h)-x}=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}
$$

请注意，这时如果我们去移动第二个点，让它沿着 $g(x)$ 的曲线逐渐靠近第一个点（亦即让 h 缩小，最后变成 0），割线 S 就会逐步转动，渐渐靠近切线 T，向切线 T 逼近（见图 11.5）.

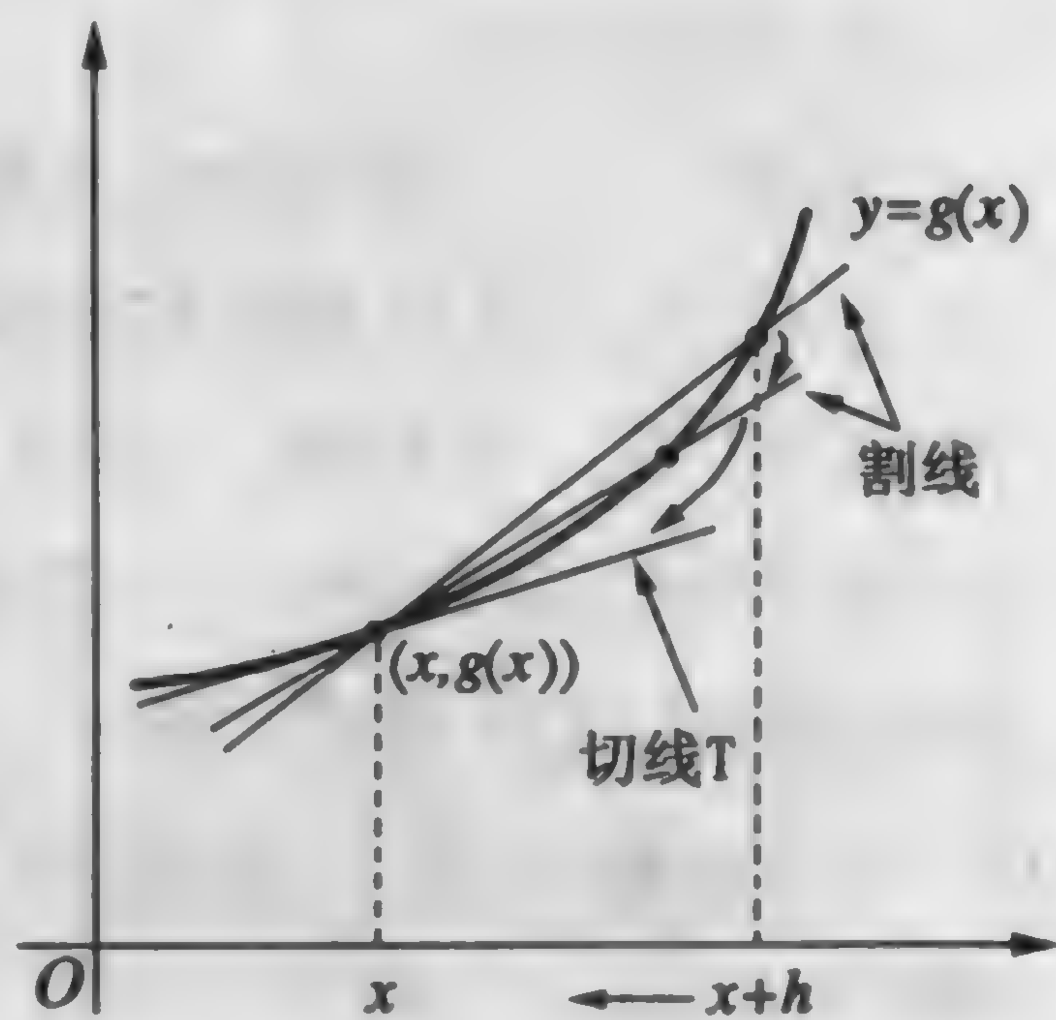


图 11.5　逐渐接近切线的割线

从图 11.5 可以看出，当第二点沿着曲线逐渐向第一点靠拢时，割线的斜率，即斜率 (S)，也会朝向切线的斜率即斜率 (T)，逐渐靠近，而斜率 (T) 就是我们要找的目标. 我们也可以把这段叙述简单写成：当 $h\to 0$，斜率 $(S)\to$ 斜率 (T). 若用式子表示，就是：

$$
\text{斜率}(T)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.
$$

由于我们寄希望于 x 处的切线斜率与函数在该点的导数是同一样东西，所以我们得出以下的定义：

定义　函数 $g(x)$ 在 x 处的导数，写成 $g'(x)$，而且定义为

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

这个式子看起来很眼熟，是不是？不错，它就是一个极限，跟我们在第 8 章讨论过的极限没两样．它居然可以应用到这儿，用来计算活生生的导数！

例题　求 $f(x)=x^2$ 的导数．

依照上面的定义，我们要找的其实就是

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

我们从题目得知 $f(x)=x^2$，那么用 $x+h$ 分别代入等号两边的 x，就可以得到 $f(x+h)=(x+h)^2$．于是，

$$\begin{aligned}f'(x)=&\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\\&\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\\&\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\\&\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\\&\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.\end{aligned}$$

（因为 $2x$ 项中没有 h，以至于在我们取极限，让 h 变成 0 的时候，剩下了 $2x$．）

所以我们说：如果

$$f(x)=x^2,$$

那么

$$f'(x)=2x.$$

若以文字表示，这就是说，只要你任选一个 x 值，我们马上就能告诉你 $f(x)=x^2$ 这条函数曲线在 x 处的切线斜率．比方你说 $x=1$，我们马上会回答说：

$$f'(1)=2(1)=2.$$

现在瞧瞧图 11.6，并且估算一下在 $x=1$ 处的切线斜率．如何？它的斜率果然差不多等于 2.

若你接着说 $x=-1$，我们会说：

$$f'(-1)=2(-1)=-2.$$

我们再瞧瞧图 11.6，果然不错，在 $x=-1$ 处的切线，其斜率无疑是负值，而且差不多为 -2.

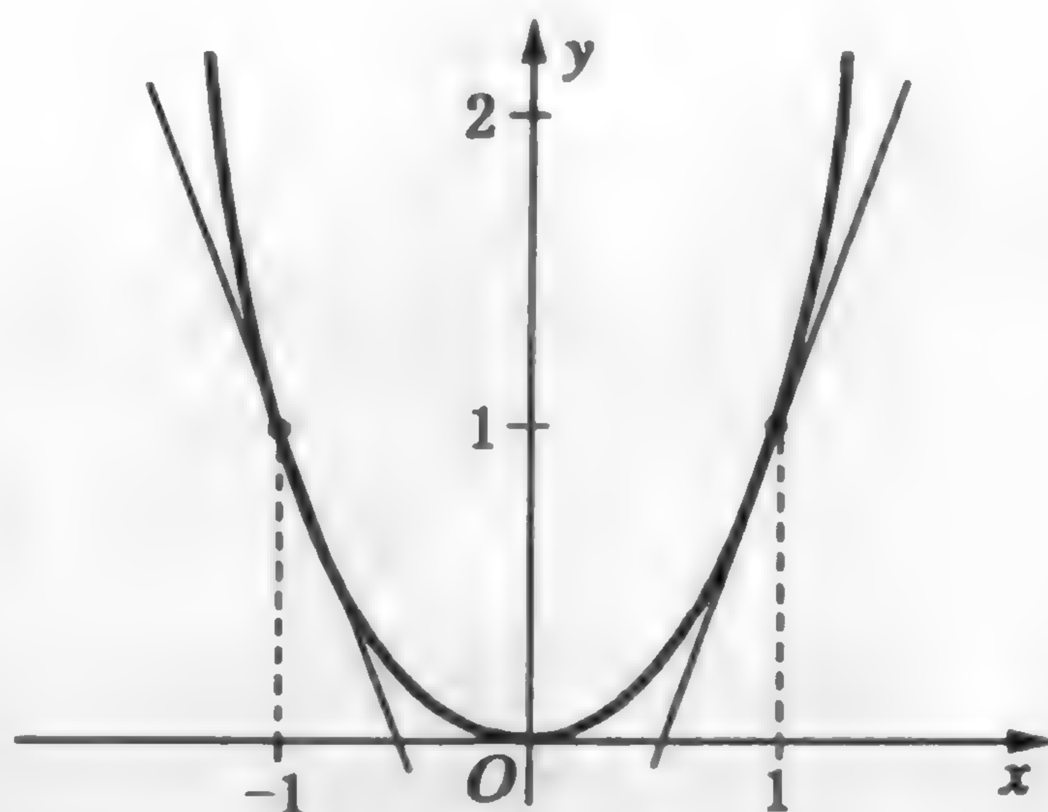


图 11.6 函数 $y=x^2$ 分别在 $x=1$ 与 $x=-1$ 处的切线

最后你说 $x=0$ 处的切线，我们马上说：

$$f'(0)=2(0)=0.$$

意思是该曲线在 $x=0$ 处的切线斜率应该等于 0，也就是该切线是水平的．瞧，果不其然！多神奇呀，不是吗？

下面让我们再做一个有名的例题.

例题 如果 $f(x)=\sqrt{x}$，试求 $f'(x)$.

依样画葫芦，我们得到

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

上面的演算重点在第二步，我们使用了一个小小的代数技巧，即把它乘上一个分数 $\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$. 一旦用了这个技巧，下面可就畅通无阻了；但若是悟不

出这一步，那可就走进了死胡同喽！

警告： 有的时候：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$不存在．在这种情况下，我们说导数 $g'(x)$没有定义．

11.2　导数极限定义的其他形式

正如你在和撞你车的人理论时说的话："喂！你的保险杆不知为什么撞到了我的保险杆，我认为你应该赔偿我的财产损失！"这可以用各种不同的方式说出来，导数的基本定义也不例外，但是各个说法骨子里其实都一样，不妨找一个你觉得最顺眼的使用就是了．譬如一个最相当常见的定义，是以 Δx 取代我们前面所用的 h：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

你可能对希腊文字母不是很熟悉，因而不知道那个在 x 前面的三角形，是一个大写希腊字母，读作 delta，相当于英文字母的 D．据说牛顿年轻的时候，由于先天有某种障碍缺陷，无法精通某种秘密的握手方式，结果不幸因此被一个名称中带 Δ 的兄弟会，拒绝了他的入会申请．当时他当然非常失望，叫人意想不到的是，他后来竟然幽默地用了这个让他毕生最伤心的字母，作为他一生最伟大成就（微积分）的基石．他用了 Δx 这个符号，代表 x 的微小变化．

我们还可以让原来的定义改动幅度更大．譬如说，第一步，用 a 取代 x．（有何不可？）于是我们就得到：

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

现在，我们再用一个新的 x，并假设 $x=a+h$，这样一来，当 h 向 0 趋近的时候，就相当于 x 向 a 趋近．所以我们可把上式改写为：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

从外表看起来，就跟原来的定义相当不一样了，不是吗？但是它们说的其实是同一回事，只是经过了一道回收再利用的程序，就像把喝完的塑料瓶做成

地毯材料一样.

那么，什么时候你才会用到本章所说的极限定义，去计算导数呢？大概是一百万年里会用到一次，而在这一节，就是那惟一的一次！在下一章，我们将建立一套直截了当的求导数法则，除了极少数极不寻常的例子外，这套法则几乎可以用在所有的函数上，而且比起直接应用导数的极限定义，要简单得太多太多啦！

对函数 $f(x)$ 的导数，写法也不只一种，譬如：

$$f'(x)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

或是那些性情怪僻的物理学家所喜爱的：

$$\dot{f}.$$

又因为我们经常令 $y=f(x)$，所以我们还有另外 3 个写导数的选择，那就是：

$$y'$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

或是

$$\dot{y}.$$

第12章 求导数的简单方法

我们在这一章要讨论的，是个极重要的核心议题. 等你将来老了，退休了，住进了养老院，只能用吸管吸你的晚餐的时候，本章谈到的这些内容，大概会是你对微积分还能依稀记得的那部分了. 幸运的是，求导数的各种基本技巧不难掌握.

12.1　微分法的基本法则

我们能说什么呢？不就是要记得滚瓜烂熟、倒背如流吗. 这些法则对于微积分之重要性，犹如你在开车时，得随时记住“不能闯红灯”、“不能辗过行人”等等法则.

12.2　幂法则

这是微积分基本法则中最让人印象深刻的法则，不信你可以到马路上，随便拦住一个人，问问他（她）：“你对微积分记得些什么?”你问过就知道，大多数念过微积分的人，经过了一些岁月之后能够想起的，可能就是这个幂法则

了．除此以外，它的英文名字听起来也非常有力：power rule（直译成“强力统治”）

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n)=nx^{n-1}.}$$

名字固然不同凡响，但是它究竟代表什么意思呢？式子里的 n 可以是任何数字．所以如果我们让 n 等于 3，就得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3)=3x^2.$$

如果让 n 等于 5，就得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^5)=5x^4.$$

如果让 n 等于 1，就得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^1)=1x^0=1.$$

这是个特例，值得特别记牢，所以让我们重复一次：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)=1$.

以上几个例子里的 n 都是正数，其实负数也是一样的．比方说让 n 等于 -2，我们就得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-2})=-2x^{-3}.$$

如此一来，求 $\frac{1}{x}$ 的导数就不成问题啦：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1})=-1x^{-2}=\frac{-1}{x^2}.$$

事实上，n 不但可以是正数与负数，还可以是分数呢！所以，求 $\sqrt{x}$ 的导数也不成问题，因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

除此以外，还有一件事情是一般任课老师在微积分入门课程里很少提起的，那就是：n 不必是个有理数——但我们现在就透露给你，让你比你的同学早些有个心理准备．因此，n 也可以是 π 跟 $\sqrt{2}$ 之类的无理数．比如说：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{\pi})=\pi x^{\pi-1}.$$

我们知道，大家一见到指数 $\pi-1$，心里就会产生一股冲动，想把它化简一下. 其实最好别去动它，维持原样就好，因为愈动它反而愈啰唆. 只要你在心里把 $\pi-1$ 想成一个大约等于 2.1416 的数，那就得啦.

一个漂亮的问题　只用归纳法与积法则，是否有可能证明 n 为整数的幂法则呢？

好！这问题问得太酷啦，因为大概除了讲台上的老师之外，课堂里大概没有人能听得懂你在问什么. 当然，像这样出风头要担点风险. 一方面，你这个问题一出口，听起来非常有智慧，会让你在教授心目中的印象瞬间窜升，远远超过班上那些泛泛之辈的同学. 如果你的教授生性老实，中了你的激将法，即刻会撇开一切，开始用归纳法与积法则，示范证明幂法则，那么你在众人心目中就建立了地位，至少在这个学期结束之前都会屹立不摇. 不过话说回来，如果你的教授不吃你这一套，反问你说："依你看呢?"而你只能支支吾吾地回答："嗯，啊，唔……我不知道……只是随便问问……"这下子就糟啦.

12.3　积法则

好啦，言归正传. 这个"积法则"可是一个非常关键的法则，微积分若是少了它，便只能跟一堆极其简单无聊的函数打交道，肯定永远混不出什么名堂来. 譬如说，假设我们有个函数 $h(x)$，而它又是另外两个函数 $f(x)$跟 $g(x)$的乘积，也就是 $h(x)=f(x)g(x)$. 现在，我们想取 h 的导数，怎么办呢？第一个闪过你脑海的念头可能是$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)=f'g'$，但不幸的是，它是错的！

我们怎么知道它是错的呢？哈，从小学、中学而大学，朝夕面对数学好歹也十几年了，总该有一点小见识吧！此外，我们还可以用一个非常轻易的方法，证明它是错的：假设两个函数分别为 $f(x)=x$ 及 $g(x)=x$，如果像上面所说，我们会得到$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)(x)=(1)(1)=1$，这个结果一看就知道不对！因为我们刚才就说过：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)=2x,$$

答案不是 1.

那么正确的答案是什么？请仔细看下面这个式子，它就是**《微积分之屠龙宝刀》**特别郑重推荐的、如假包换的“积法则”：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)=f'g+fg'.}$$

猛然一看这个式子，你可能觉得脑袋里乱成一团，怎么会是左一撇右一撇，中间还不知道从哪儿跑出来一个加号！但是事实上，如果我们把它用文字说出来，就极为简单又好记了：“两个函数乘积的导数，等于第一个函数的导数乘以第二个函数，加上第二个函数的导数乘上第一个函数.”

我们马上就用这个现成的例子来磨磨刀锋. 假设 $f(x)=g(x)=x$，依照积法则，就得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)(x)=(x)'(x)+(x)(x)'=(1)(x)+(x)(1)=2x.$$

这不就等于前面幂法则所说的函数 x^2 的导数？所以至少在这个例子里面，幂法则与积法则是相互一致的. 数学，是讲究一致性的.

12.4 商法则

现在，我们还想求$\frac{f}{g}$这样的分式的导数，其中的 f 跟 g 是两个函数. 这条法则不太容易记住，不过你很幸运，我们待会儿要教你唱首歌，一边唱一边记！商法则的公式如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

如何记住本公式（得谢谢“白雪公主”这部脍炙人口的卡通电影，里面的七位小矮人一出场就唱了一首“嗨呵歌”）？我们把公式中的 f 以“嗨”取代，g 以“呵”取代，而以 D 代表“某某的导数”，公式就变成了：

$$D\frac{\text{嗨}}{\text{呵}}=\frac{\text{呵}\ D(\text{嗨})-\text{嗨}\ D(\text{呵})}{\text{呵}^2}.$$

如果要念的话，就是："呵 D 嗨，减去嗨 D 呵，除以呵呵．" 够简单了吧？如果连七矮人里的瞌睡虫跟喷嚏哥，都能嗨呵自如，你还有什么问题？

马上举个例子：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=\frac{(x^2+1)(1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

常见的错误　许多人记不住分子中的两项到底是哪个减哪个，是呵 D 嗨在前面呢（对，在前面）？还是嗨 D 呵在前面（错的）？因而搞得答案差了一个负号.

12.5　三角函数的导数

当你年纪还小时，有两件事情你必须记得，一是你的名字，一是家里的住址．如果你把这两件事搞混了，后果可能非常严重，搞不好永远回不了家．现在你已经不再是小孩子了，不过在这一节，你还是有两件事情必须记得，不得搞混，那就是：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)=\cos x.}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)=-\sin x.}$$

因为所有其他的三角函数的导数，都可从这两个基本公式推导出来.

对于这两个公式，你可能不容易记住哪一个的前面有负号．我们几位作者的建议是：记住"正弦函数微分之后还是正的"意思就是，当你把正弦函数微分时，不要变号．我猜你也会想这么记："余弦的微分要变号"，不过这没有正弦那么好记.

如果要用导数的极限定义，来证明正弦跟余弦函数的导数公式，可能需要用点小技巧．是什么小技巧呢？就是我们在前面特别拿出来讨论的一个事实：

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

你可能得自行斟酌一下，看看任课教师是否指望你能够用这个极限式子，去推导出三角函数的导数来.

无论如何，只要你知道了这两个三角函数的导数，接下来就水到渠成了．譬如正切函数的导数，一点也不难，只要先改成：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right),$$

由商法则，可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{(\cos x)(\sin x)'-(\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$\frac{(\cos x)(\cos x)+(\sin x)(\sin x)}{\cos^2}=$$

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

由于 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，上式就等于$\frac{1}{\cos^2 x}$，又由于$\frac{1}{\cos x}=\sec x$，因此最后的结果就成了 $\sec^2 x$.

因为这个正切函数的导数经常出现，所以值得把它背下来：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=\sec^2 x.$$

其他 3 个三角函数 $\sec x$、$\csc x$ 及 $\cot x$ 的导数似乎不需要去背，因为它们都很容易推导出来．同样的，要不要实际推导，跟任课教授的喜好非常有关系．但无论如何，你一定要知道如何利用正弦和余弦的导数，去求这 3 个函数的导数，因为这是相当典型的考题．

在这儿附带提一点，正如余弦函数在微分时加了一个负号，其他两个以“余”开头的三角函数，也即余割（csc）及余切（cot），微分时也要加负号．

12.6　二阶导数、三阶导数、更高阶的导数

在这一节，我们会把同一个函数微分很多遍，这说起来相当容易，因为你已经知道怎么求函数的导数了．总的来说，函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$，本身仍然是 x 的函数，所以照样可以微分，再取其导数，得到的结果就是 $f''(x)$表示，称为 $f(x)$的二阶导数．当然，这个二阶导数 $f''(x)$一样可以再微分取导数．这就有些像把肉放进绞肉机里绞碎，若想要绞出来的肉细嫩好吃，你可以一绞再

绞，直到你满意为止．（如果你吃素，请把绞肉机的比喻改为果菜汁机）．

举例来说，如果 $f(x)=2x^3$，则 $f'(x)=6x^2$，而 $f''(x)=12x$.

你或许会问，求二阶导数干什么？请稍安勿躁，等我们以后谈到函数图像的时候，你就会明白了．

就像老牌影星伊丽莎白·泰勒，在她的第二次婚姻变成过去式之后猛然省悟："为什么我一定要停在第二次呢?"在此你也可以一而再、再而三的微分，取导数．

所以，若继续刚才的例子，我们就得到 $f'''(x)=12$，$f^{(4)}(x)=0$，而更高阶的导数全都等于 0.

一般而言，$f^{(n)}(x)$就是指 $f(x)$的 n 阶导数．

（比较刁钻的）例题　如果 $f(x)=\sin x$，那么 $f^{(101)}(x)$ 为何？

你以为我们在开玩笑，是吧？叫你一次次地取导数，一共取 101 次？你一定觉得我们是神经病．

其实你根本不必那么折腾．瞧，这些导数事实上是在兜圈子，每微分 4 次就会循环一周，回到原点：

$$f(x)=\sin x,$$
$$f'(x)=\cos x,$$
$$f''(x)=-\sin x,$$
$$f'''(x)=-\cos x,$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x.$$

微分第 4 次时，得到的导数又回到了最初的 $\sin x$.

同理，

$$f^{(8)}(x)=\sin x,$$
$$f^{(12)}(x)=\sin x.$$

事实上，

$$f^{(100)}(x)=\sin x.$$

因为 100 是 4 的倍数．所以若再取一次导数，你就会得到

$$f^{(101)}(x)=\cos x.$$

够酷吧？

第13章

速度：油门踩到底

13.1 速度即导数

现在我们来看看导数在日常生活上的一些用途，目的是要把导数跟你的生活起居拉上关系，让你觉得它就在你的身边．我们想告诉你，导数不只是你的街坊邻居，而且还可以变成你真正的朋友．但是怎么样才能从泛泛之交，一变而成为好朋友呢？这很难一概而论，不过若是对方愿意替你做一些事情，譬如在你生日时送张卡片，或者偶尔为你做顿好吃的晚餐等等，这些对增进双方友谊多少会有所帮助．

导数虽然不会为你做这类事情，却能够为你做一些其他好友没法办到的事情，一些能说服我敞开心胸的事情．怎么说呢？举例来说吧，导数能告诉你速度有多快．假设你正在开车兜风，你也不时看一下车速表，譬如你看到指针指着时速 65 英里（相当于时速 105 千米），这是在告诉你，你的宝贝车的瞬时速度．为何说是瞬时速度呢？因为如果你多踩一点油门，车速就会加快一些，换言之，车速表告诉你的，是当时那一瞬间的车速，而不是全程的平均速度．

定速跟变速之间，有很重要的区别．我们不是常说嘛，速度＝距离÷时间，不过，这个说法照一般人的意思，多半是指整趟旅程的平均速率．但是除

非你的车子装有定速装置，否则你的车速免不了会时快时慢. 不管怎么说，在这儿你得分清楚什么是平均速度，什么是瞬时速度。平均速度是由：

$$\frac{\text{总距离}}{\text{总时间}}$$

得到的. 至于瞬时速度，这正是接下来要谈的，且听我们慢慢道来.

到底什么是瞬时速度？我们可以把瞬时速度想成是“在非常短的一段时间内的平均速度”. 依照这个想法，如果 $f(t)$ 表示在时间为 t 时、我们在一直线上的位置（你可以把这条直线想成是从台北的南港到屏东的东港），用 $v(t)$ 表示瞬时速度，另外用 Δt 表示一段非常短的时间，那么在 t 时间，你的位置就是在 $f(t)$，等到经过一小段时间 Δt，也就是在 $t+\Delta t$ 时，你的位置就是在 $f(t+\Delta t)$ 上. 换句话说，在这短短的 Δt 时间内，车子走过的距离为 $f(t+\Delta t)-f(t)$，也就是在 Δt 这段时间内，你的平均速度是：

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

现在你恐怕也读得不耐烦了，什么短时间内的平均速度，赶快告诉我瞬时速度是什么鬼东西吧！简单，只要把上述平均速度里的 Δt，继续缩短到零嘛. 所以就是：

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

如果你还算专心的话，你可能马上察觉：“等等，这不就是导数的极限定义吗？原来瞬时速度函数就是 $f(t)$ 的导数.”

一点也不错，若 $f(t)$ 是位置函数的话，瞬时速度 $v(t)=f'(t)$.

13.2　车子的位置与速度

例题　假设你人在美国，开车从纽约前往波士顿，而你一路上的位置函数（离开纽约的里程，单位为英里）以下面这个函数表示：

$$f(t)=\frac{5t^3}{3}-25t^2+120t.$$

函数中的 t 是从起点到达旅程中某一定点所花掉的小时数. 假设你开了 8 小时的

车，才终于到达波士顿.

(a) 试求当 $t=\frac{1}{2}$ 小时时，你的车速若干？

(b) 在这趟旅行途中，你有没有走回头路？

解 (a) 首先我们从题目给的位置函数，算出瞬时速度函数：

$$v(t)=f'(t)=5t^2-50t+120,$$

然后，若想知道出发半小时后的车速，只要把 $t=\frac{1}{2}$ 代入上面的速度函数就可以了：

$$v(\frac{1}{2})=f'(\frac{1}{2})=5(\frac{1}{2})^2-50(\frac{1}{2})+120=\frac{5}{4}-25+120=96.25(\text{英里/小时}).$$

嘿！你开得未免太快了吧？（相当于每小时 155 千米！）

解 (b) 你有没有走回头路？当然有. 看来你在开进休息站的时候，为了仔细查看你头上的几根稀疏头发，你把心爱的纽约大都会队的棒球帽摘了下来，结果搁在洗手台上忘了带走. 等到车子开过罗得岛州的首府普罗维登斯（Providence），你突然从后照镜里瞧见自己亮闪闪的光头，这才察觉到你把你的宝贝帽给忘啦. 于是你即刻掉头，回到那休息站，却不幸发现帽子给人丢进马桶了，这准是波士顿红袜队的球迷干的好事.

你会问，我们是怎么知道的？当然是从速度函数看出来的. 怎么说呢？如果在这趟旅途中（即 $0\leqslant t\leqslant 8$），速度函数曾经为负值，就表示你在那段时间里一定是往纽约的方向回头开. 另外请注意：

$$v(t)=5(t^2-10t+24)=t(t-6)(t-4),$$

表示当 $t=4$ 跟 $t=6$ 时，$v(t)=0$，也就透露你曾把车子停下来，想来那应该是当你发现丢了帽子，决定掉头开回休息站（因此你的速度由正转负），等你看到马桶里的帽子，只好心痛得空手离开，继续你的波士顿之行. 要怎么推断我们说得对不对呢？你可以把这段时间内的任一时间点，譬如 $t=5$，代入速度函数：

$$v(5)=5(5)^2+120=-5(\text{英里/小时})$$

果真是个负数，表示你的确掉过头，走了回头路. 你的确非常喜爱那顶棒球

帽．要不是这么一折腾，你早就该到达波士顿了，怎么也不会花掉 8 个小时呀……

13.3　自由落体的速度

例题　假设自从你开始修微积分这门课，就不幸得了极严重的头痛症，什么针灸、止痛药、心理辅导等等你全都试过，可是病情不但不见好转，甚至愈来愈糟．最后你实在不能忍受其苦，决定一了百了，于是开车到旧金山雄伟的金门大桥中央，下了车，爬过护栏，站在高高的桥架边缘，水面上方 400 英尺处．此时你仍然头痛欲裂，心想这么痛苦，不活也罢，所以先把微积分教科书（不管走到哪，你都随身带着）从怀里掏出，往大海里一丢，随后自己也纵身向下跳去．好了，你这一跳，顿时成了自由落体，因此在 t 秒后，你距离水面的高度（以英尺计）就表示成这个函数：$h(t)=400-16t^2$．

请问：(a) 你得等多久，才会撞到水面？

解　(a) 这部分非常简单，根本不需要用到微分的技巧．撞到水面就等于你的高度变成了 0，亦即 $h(t)=0$，因而：

$$400-16t^2=0,$$

$$t^2=\frac{400}{16}=25,$$

$$t=5.$$

所以你跳出后 5 秒，就撞到水面了．

但是就在你把教科书丢出去的一刹那，你发现头痛居然不药而愈．你这时才恍然大悟，原来让你头痛的正是那本人人厌恶的微积分教科书！顷刻间，无病一身轻，人生处处充满光明与希望，唤回了你对生命的热情．

(b) 现在假设你从小练习过跳水，是圈中高手，因此只要你撞击水面的速度在每秒 200 英尺以内，你就会安然无恙，毫发无伤．请问：你这次会安然无恙吗？

解　(b) 这儿的关键是你撞击水面时的速度. 我们可以微分 $h(t)$ 求出速度函数:

$$v(t)=h'(t)=-32t.$$

从 (a) 我们已经知道, 在 $t=5$ (秒) 的时刻你会撞击水面, 因此你撞击水面时的速度就是:

$$v(5)=-160.$$

这表示你撞击水面的速度是每秒 160 英尺, 所以你暂时安然无恙. 答案之所以有个负号, 是表示你的高度在减少. 我们说你暂时没事, 是指你尚未脱离险境, 剩下的问题还大得很——你掉进的是恶名昭彰的冰冷海湾, 所以你必须跟强大的海流奋战, 在冰冷的海水里游泳 2 英里才能上岸. 如果你能做得到, 也许还赶得上 3 点钟的微积分课.

第 14 章

链式法则：S&M 的游戏

一瞧见链式法则这个名称，你可能会联想到人犯被关在潮湿的黑牢里，脚镣手铐地栓在笨重的铁链上，铁链的另一端牢牢钉死在墙上，而且一关就是二三十年之久．只不过，链式法则的实际情况没有你想象得这么糟，顶多只关个 10 年．

链式法则的目的，是要让我们能够微分那些合成函数．这个规则中有两个重要素材：一个是我们需要知道如何微分，另一个则是我们得知道如何把函数合成在一块儿．你发现了吗？这两个素材我们在前面都分别讨论过了，现在只需把它们搅和到一起就成了．

对于链式法则，你只有一个极其简单的口诀要背下来．

链式法则（chain rule）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x))=f'(g(x))g'(x).$$

用文字来叙述，就是“由两个函数凑起来的合成函数，其导数就等于里边函数代入外边函数的值之导数，乘以里边函数的导数”．念起来虽说有点拗口，但是只要特别注意那些括号，只要不放错了地方，就不容易出错啦！

我们在这儿不打算证明这个公式给你看，不过你不必担心，我们绝不会编造这样一条奇怪的公式来骗你．

现在我们再仔细瞧瞧这个公式．你从它得到的信息，应该是如何去求合成

函数 $f(g(x))$的导数，也就是方程式左边的部分；因此，这就表示你应该能把某些东西填进方程式右边的部分．这样说还不是很清楚明了，让我们举个例子来说明．譬如：

$$f(x)=\sin x,$$
$$g(x)=x^2+4,$$

于是，

$$f(g(x))=\sin(x^2+4).$$

现在我们想求这个函数的导数，也就是要问：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x))$会等于什么？我们只要把链式法则公式右边的各项，一项一项像用填空一样的方式找出来：

$$f'(x)=\cos x,$$
$$f'(g(x))=\cos(g(x))=\cos(x^2+4),$$
$$g'(x)=2x,$$

所以$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x))$也就等于上面最后两项的乘积：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x))=[\cos(x^2+4)]2x.$$

最末端的 $2x$ 有时候称作“尾巴”．正如狐狸妈妈在小狐狸第一天离家上学时，送它上校车，临别时一定会再三叮咛：“小乖乖，放学后别忘了把尾巴带回来哟！”

链式法则还有第二种形式，比前面的第一种形式容易记，但可能也比较难以应用．此形式是这样的：假设我们想求 $f(g(x))$的导数，我们可以先加一个新变量“u”，而且设 $u=g(x)$；于是我们要求的就是 $f(u)$的导数，其中 $u=g(x)$．然后，链式法则就摇身一变成了下面这个非常好记的公式：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

例如我们要求：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x^3-7x}),$$

就可以先设 $f(u)=\sqrt{u}$，而 $u=x^3-7x$．于是

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{u}}(3x^2-7)=\frac{3x^2-7}{2\sqrt{x^3-7x}}.$$

当然，这两种形式各有各的难处，否则为什么几乎每个学微积分的人都闻之色变？归根到底，它的真正难处是，题目中通常不会自动点出什么是 f、什么是 g，这些题目只是丢给你某个复杂可怕的函数，然后叫你微分．所以真正的问题并不是要你把函数合成起来，而是去"分解"——找出函数的组成分子．每个人终有一天会认识到分解、腐烂（除非你选择火葬），既然是迟早的事，何必一定要等到那个时候呢？咱们现在就开始学呀！

这儿有个最常见的情况．假设 $h(x)=(g(x))^n$，那么 $h(x)$应该是 $f(x)=x^n$ 跟 $g(x)$的合成函数，至于 $g(x)$是啥，我们暂时还不知道．但是从幂法则，我们得知 $f'(x)=nx^{n-1}$，所以

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)=n(g(x))^{n-1}g'(x).$$

这是幂法则的广义形式，很像多了个尾巴的幂法则，我们不妨称之为"广义幂法则"：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x))^n=n(g(x))^{n-1}g'(x).$$

这儿有个很好的实例，可说明广义幂法则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{3x^5})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((3x^5)^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}(3x^5)^{-\frac{1}{2}}(15x^4).$$

例题（复杂的）　令 $k(x)=[\cos(\sqrt{x}-x)]^3$，求 $k'(x)$.

这个题目相当刁钻，但是我们不难看出，题目所给的函数是由几个小零件凑起来的：先是$\sqrt{x}-x$ 取余弦，然后整团东西再取三次方．所以我们可以令：

$$f(x)=\sqrt{x}-x,$$
$$g(x)=\cos x,$$
$$h(x)=x^3,$$

于是 $h(x)=h(g(f(x)))$.

那么 $k'(x)$等于什么呢？若把前面积累起来的知识重复运用，我们就可以得到：

$$k'(x)=(h(g(f(x))))'=h'(g(f(x)))(g(f(x)))'=$$
$$h'(g(f(x)))g'(f(x))f'(x).$$

在上面的算式里，我们其实只需把链式法则应用到第二行的"尾巴"

$g(f(x))$上．这时你可能会问："什么时候我才知道演算已经完成了呢？"答案很简单，如果你看到还有"′"这个微分符号紧跟在括号后面，像第一行跟第二行那样，就表示还有待努力；一旦"′"全都紧跟在英文字母后头，就表示你做完了．现在，再把式子中各个项目分别计算出来：

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}-1, \qquad \surd$$

$$g'(x)=-\sin x,$$

$$h'(x)=3x^2,$$

$$g'(f(x))=-\sin(\sqrt{x}-x), \qquad \surd$$

$$g(f(x))=\cos(\sqrt{x}-x),$$

$$h'(g(f(x)))=3(\cos(\sqrt{x}-x))^2. \qquad \surd$$

最后，$k'(x)$就是上面打了勾（√）的三行式子的乘积：

$$k'(x)=3(\cos(\sqrt{x}-x))^2[-\sin(\sqrt{x}-x)]\left[\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}-1\right].$$

在你想知道是否还有时间退选微积分课之前，你应该先有个心理准备：理论上，教授有可能叫你去微分一个包括了7个函数的合成函数，因此你需要连续应用6次链式法则，浪费一大堆纸，才能找出答案．不过话说回来，教授出此考题，其实是非常不切实际的，因为总得有个可怜人去批改考卷，他自己当然可以避免这项苦差事，但是就连他的硕士生和博士生，也不会高高兴兴地替他仔细追踪检查你那密密麻麻的6大张算式．

所以，如果你的教授不是不近情理的神经病，考题最多只会要求你使用两次链式法则；即使这样，你班上至少有一半的同学，还压根儿不会应用两次链式法则呢．因此你最好多看看最后那个例题，做熟练一些，你的成绩就会在全班的前50％中啦．

第15章 画函数图像：如何当个专家

15.1　画函数图像

我们在前面提到过最原始的函数图像画法：先描出几个点，最后把这些点连起来．除了这种方法，现在我们要来看看，导数在画函数图像方面能不能告诉我们一些信息．如果已知某函数的导数在某处是个正数（以数学行话来说，即指在某个定值 x，$f'(x)>0$），就表示通过该点的切线斜率为正，或函数图像在该点的斜率为正，也就是该函数正在递增．反过来说，如果导数在某处为负值，则表示该函数在递减（见图 15.1）．

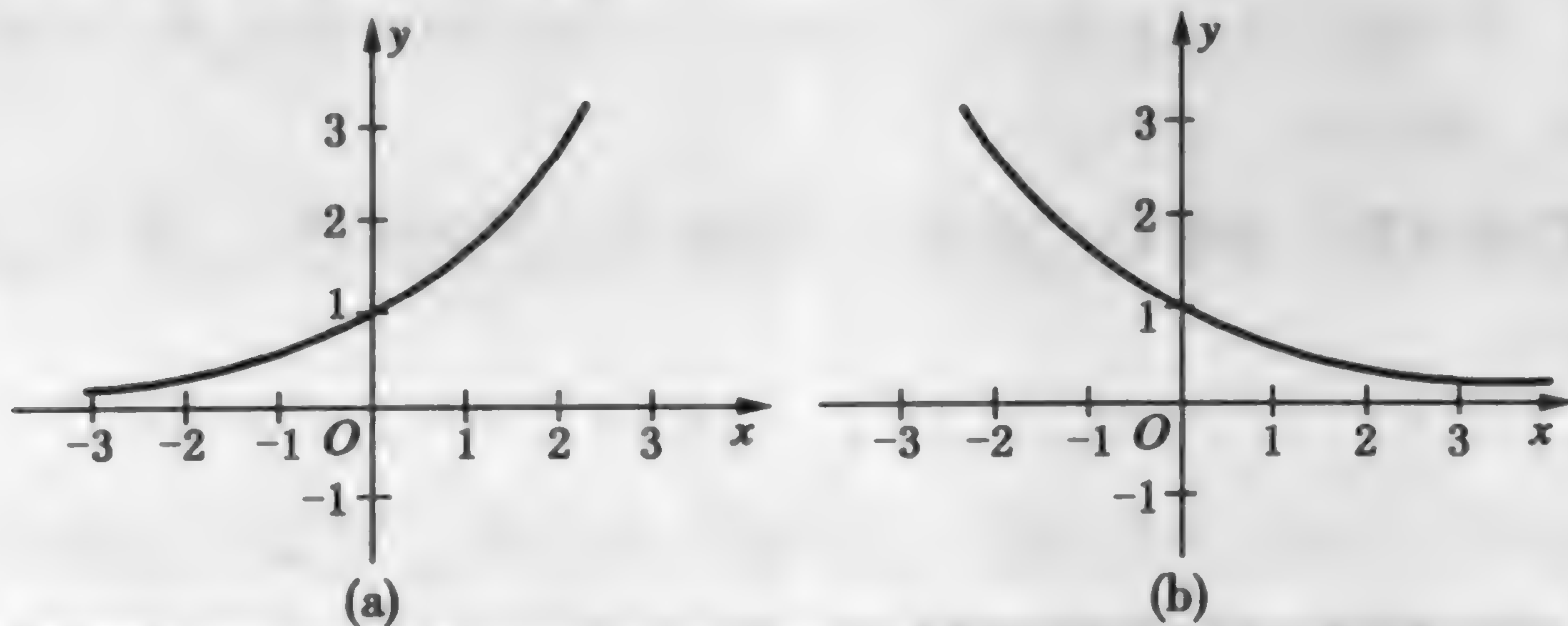


图 15.1　(a) 函数递增；(b) 函数递减

所以，假如你身为某帐篷公司的财务经理，走进会议室向董事们做报告时说：“各位先生女士，我有个不太好的消息要报告给大家：我们的利润函数的导数目前是负值.”你马上就会看到在座的董事们开始面色沉重. 你的意思并不是说公司目前在赔钱，正好相反，大家还是赚钱，只不过，公司的利润正在下滑，公司如果不想办法及时扭转颓势，要不了多久，利润就会掉到 0 以下，公司只有关门大吉，大伙就等着到附近的游乐场扫厕所混口饭吃了.

另一方面，假设你是一个具有超智慧的外星植物孢子，正试图征服、统治地球上的人类. 孢子队长向你报告说：“受我们操控的‘智人’数目的导数现在为正值.”你听到这样的消息，真是雀跃万分，因为这消息的意思是说，被你们控制的人类总数正在增加，只要这趋势持续下去，加上一点点运气，有朝一日地球上的每一个人都会臣服于你. 到时候，你就又征服了一颗行星，若照这样继续征服另外二十几万颗行星，就再也不会有谁讥笑孢子啦！

小组作业 请环顾教室一周，估计一下到底有多少同学，已经受到外星植物孢子的控制. 教授不算在内.

要是函数在某个 x 值的导数既非正也非负，而是等于 0 呢？这表示该函数既不递增，也不递减，犹如停留在一个平台上. 如果看看 x 的两侧之后，你会发现 x 可能是位于高点（如图 15.2a），也可能是位于低点（如图 15.2b），要不就是位于一个休息站或转折站（如图 15.2c）.

无论如何，经过该点的切线一定是水平的. 好了，我们现在可要告诉你一些有用的信息：如果知道了这类平台的位置，你至少就能得知外星植物孢子的入侵状况，进而决定地球的命运. 这样吧，让我们把导数等于 0 的那个点的 x 坐标，叫做“临界点”好了.

让我们说清楚、讲明白 如果一个函数在各处都有定义，那么在该函数的高点或低点：

$$f'(x)=0.$$

我们称高点为该函数的局部（或相对）极大值，称低点为该函数的局部（或相对）极小值.

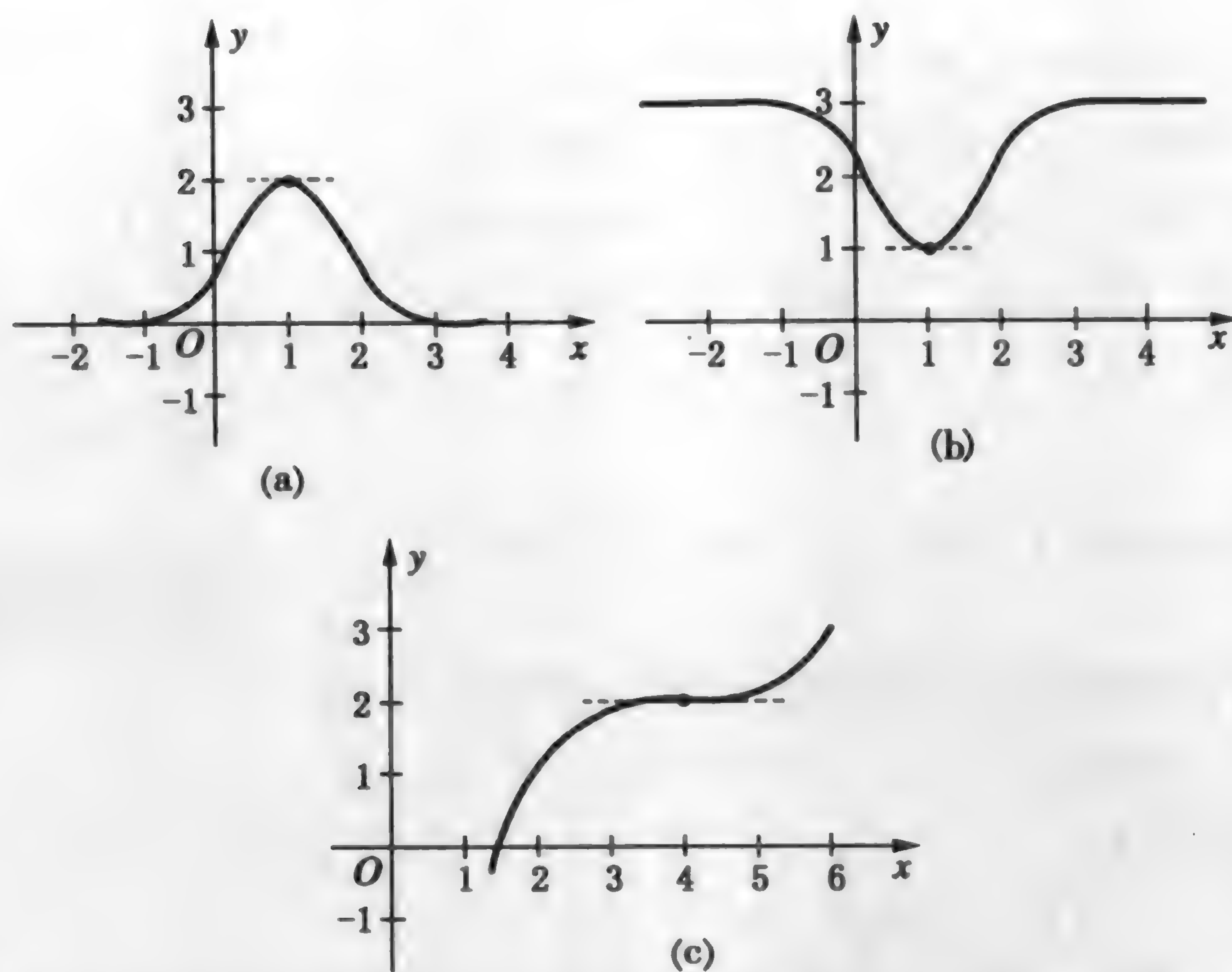


图 15.2　函数在几个 x 值的导数等于 0：(a) 在高点；(b) 在低点；(c) 在中途休息站

例题　试找出下面这个函数所有的局部极大值和局部极小值：

$$f(x)=x^2-4x+5.$$

局部极大值和局部极小值只有在 $f'(x)=0$ 的地点出现，也就是在我们前面提过的临界点. 从题目所给的函数，我们得到：

$$f'(x)=2x-4.$$

所以，若希望

$$f'(x)=0,$$

则

$$2x-4=0,$$

$$x=2.$$

请注意：当 $x<2$ 时，$f'(x)<0$，意味该函数在递减；而当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，意味着函数在递增. 又当 $x=2$ 时，$f(x)=1$，所以我们知道它的图像通过点 (2，1)，因而看起来一定如图 15.3 所示.

相当不错. 只花了一点点功夫，我们就大致搞清楚了这个函数图像的长相. 特别是我们已经了解，它只有一个局部极小值，而且完全没有局部极大值. 几分钟内就能得知这么多信息，而且画出来的图像几乎是非常正确，完全不像“连连看”那么呆板无聊，真是可圈可点.

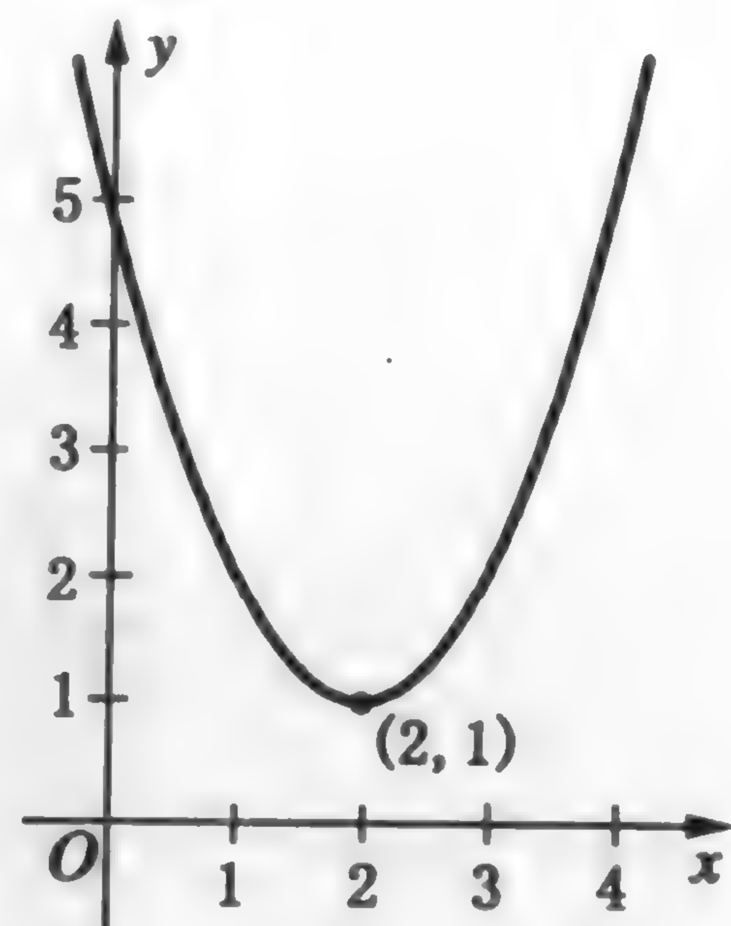


图 15.3 $f(x)=x^2-4x+5$ 的图像

例题 **试画出 $f(x)=x^3-3x+1$ 的图像.**

首先，我们要找出图像的高点跟低点在哪儿（如果有的话），也就是 $f'(x)=0$ 的所有点. 所以，第 1 步就是求 $f'(x)$：

$$f'(x)=3x^2-3.$$

第 2 步是让它等于 0，也就是解：

$$3(x^2-1)=0,$$

$$3(x-1)(x+1)=0.$$

这就告诉我们，$x=1$ 和 $x=-1$ 是两个可能的答案.

因此，高点与低点可能在 $x=1$ 和 $x=-1$ 两处. 那么我们又要如何判定究竟哪个是高点、哪个是低点，或者两个同为高点或低点呢？搞不好两个都是休息站. 要怎么判断？当然是用导数. 我们只要看看 $f(x)$ 在其他 x 值的导数是正是负，就能知道该处在递增还是递减. 那么要怎么看 $f'(x)$ 对不同的 x 值是正是负呢？由于情形较为复杂，所以我们最好用一个表把它们全部列出来：

表 15.1

函　数	$x<-1$	$-1<x<1$	$1<x$
$x+1$	−	+	+
$x-1$	−	−	+
$f'(x)=3(x-1)(x+1)$	+	−	+
$f(x)$	递增	递减	递增

比方说，当 $x<-1$，$x+1$ 为负，$x-1$ 也为负，而两者之乘积反而变成了正，即 $f'(x)$为正，所以 $f(x)$在递增．当我们通过了 $x=-1$，$f(x)$就从递增变成递减，所以在 $x=-1$，一定有个局部极大值．而在通过了 $x=1$ 后，$f(x)$又从递减变成了递增，所以在 $x=1$ 一定有局部极小值．

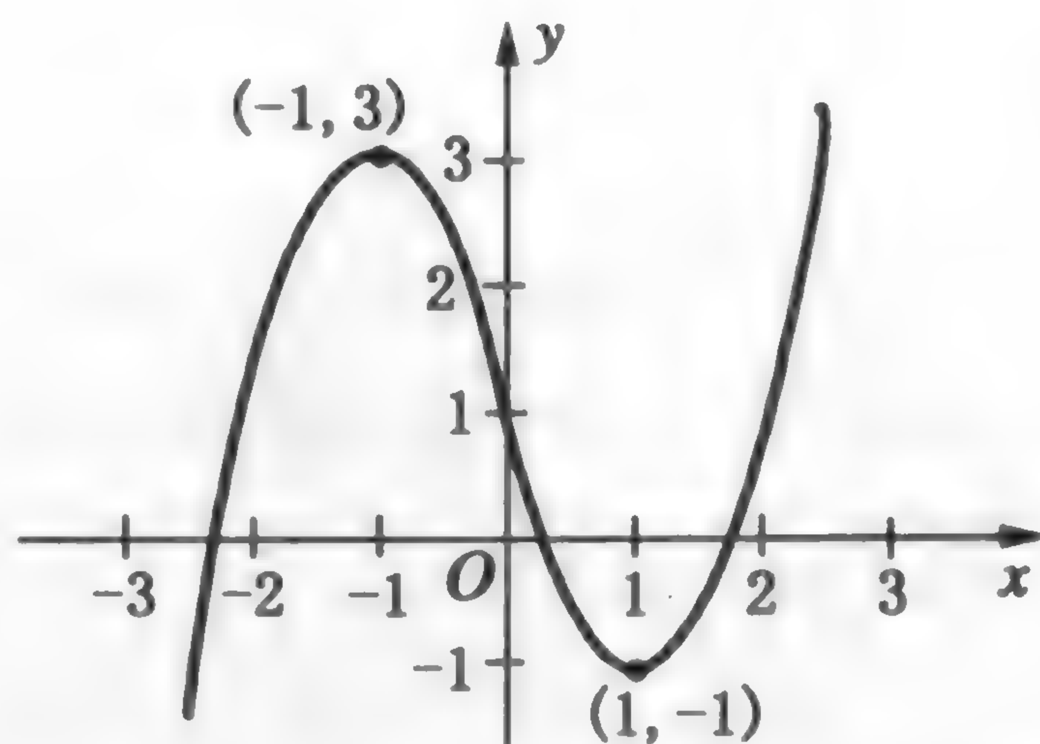


图 15.4　$f(x)=x^3-3x+1$ 的图像

为了画出函数图像，我们还得知道 $x=1$ 与 $x=-1$ 时的函数值．把两个 x 值分别代入 $f(x)$，我们得到 $f(-1)=3$以及 $f(1)=-1$．有了以上的信息，如图 15.4 所示的函数图像便昭然若揭啦！

15.2　能够绊倒你的狡猾图像

好，看来函数图像不过如此，还有什么事需要知道呢？嘿，以上两个例题仅仅是最基本的，往后你可能会遭遇到的难题尚未现身呢．现在让我们挑一两个来瞧瞧．

1. 导数等于 0 的点，不一定是局部极大值或局部极小值，下面这个函数

$$f(x)=x^3$$

就是一个例子．

它的图像如图 15.5 所示．

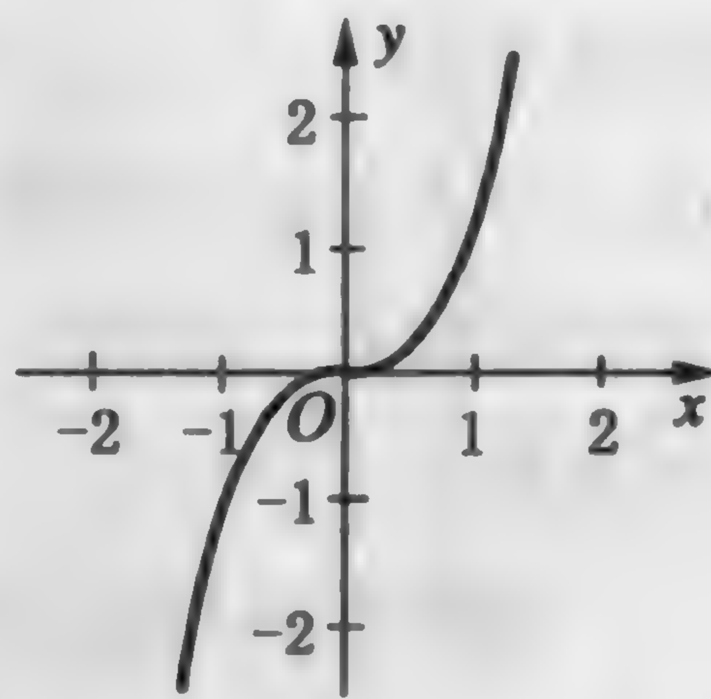


图 15.5　$f(x)=x^3$ 的图像

2. 有时，一个函数的局部极大值或局部极小值，会发生在导数不存在的点．下面的函数

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$$

就是一个这样的例子．

它的导数就是

$$f'(x)=(\frac{2}{3})x^{-\frac{1}{3}}.$$

在 $x=0$，导数没有定义！但是从图 15.6 来看，极小值的确发生在 $x=0$ 的地方.

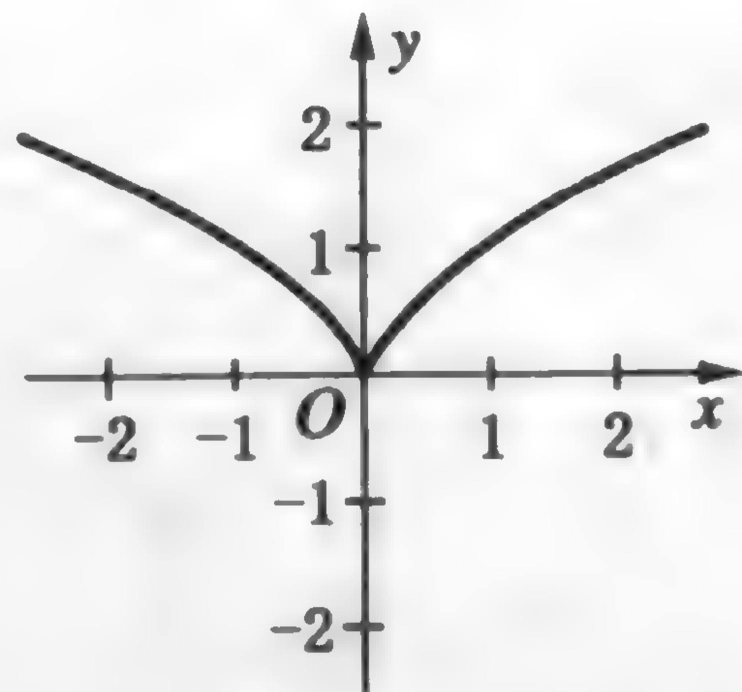


图 15.6　$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 的图像；导数在 $x=0$ 不存在，这是因为在那儿的切线是垂直于 x 轴的

导数等于 0 或者导数不存在的点，都有可能是局部极大值或局部极小值所在. 所有这些点的 x 值，都称为临界点，了解这点非常重要.

> **考试必背**　局部极大值与局部极小值所在点，导数可能不存在，也可能等于 0.

15.3　二阶导数检测

我们刚才看到，若在点 $x=a$，$f'(x)=0$，而且对 $x<a$，$f'(x)>0$（表示此函数在 a 的左边是递增的），而对 $x>a$，$f'(x)<0$（表示此函数在 a 的右边是递减的），则点 $x=a$ 一定是函数 $f(x)$ 的局部极大值（山丘的高点）. 不过，每次都要在临界点左看右瞧，也真够烦人的了，在现在这个忙碌的社会，谁有时间这么磨蹭？幸好，我们有一个代用办法，可以更快得知那个点是极大还是极小.

我们可以用著名的“二阶导数检测”，它的功能非常惊人：

如果 $x=a$ 是个临界点，且 $f'(a)=0$，则：

1. 若 $f''(a)>0$，则函数在 $x=a$ 有局部极小值.

2. 若 $f''(a)<0$，则函数在 $x=a$ 有局部极大值.

简单吧！惟一的问题是你要怎么记住哪个是哪个，而不至于搞混？这也很简单，只要记得图 15.7 所示的面具就行啦！右边的笑脸两个加号当做眼睛（加

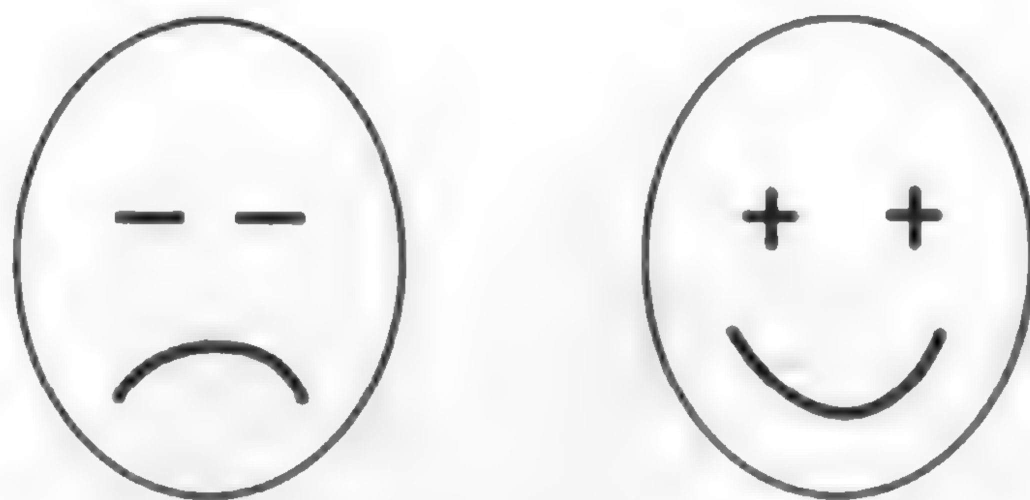


图 15.7 在极大值，观点（以及二阶导数）是负面的. 在极小值，观点（以及二阶导数）是正面的

号代表 $f''(x)>0$，二阶导数为正)，微笑的嘴形当然就代表局部极小值；左边的哭脸眼睛闭着，是两个减号（代表 $f''(x)<0$，二阶导数为负)，而下弯的嘴形当然也就表示是局部极大值了. 当然，你也许会认为，我现在好歹也是大学生了，可不想再玩这种小孩子游戏！但是，奉劝你抛开自尊，把这两个可爱的面具记牢，没事的时候不妨亲手画几次，这对记忆非常有帮助.

对了，我们还漏掉了一种情况，那就是当 $f'(a)=0$ 的情形. 真是抱歉，我们也不知道会发生什么情形. 事实上，它仍然表示极大值、极小值或休息站的其中一种. 看来我们必须回到那个麻烦的老方法，耐着性子去检验临界点两边的导数，看看究竟是递增还是递减. 已经讲得够啰唆了，让我们来点实际行动吧！

例题 试求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+14$ 的所有极小值和极大值.

嘿！这和前一个例题的函数长相不是差不多吗？不过，现在你可以改用新学到的二阶导数检验法，去判定极大值与极小值. 我们已经知道，$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)$，而两个临界点分别是 $x=-2$ 和 $x=1$；接着取二阶导数，得到 $f''(x)=12x+6$. 由于 $f''(-2)=-18<0$，所以在 $x=-2$，有局部极大值；又由于 $f''(1)=18>0$，所以在 $x=1$ 有局部极小值. 你瞧，这多么简单呀！

15.4 凹性

现在让我们谈谈曲线更精致的一面．你知道那些喜欢买精致小跑车的跑车狂，他们其实极少把车开出去兜风，他们只是长年把车停放在车库，不时去擦拭、抚摸一番．对此我们一点也不觉得怪异，当隔着一层柔软的布，顺着车轮上方的挡泥板，一寸一寸地感受金属车身的平滑表面，有谁能不为之陶醉呢？那种说不上来的感受，混合着刺鼻的机油味、玲珑的保险杆曲线……无一不叫人想入非非．但是，这跟数学有啥关系呢？

这个嘛，数学至少可以帮助你赚到买跑车所需的钱，而且一旦你把车开回家之后，还会需要数学替你度量那些挡泥板的曲线有多凹凸有致，也好在下次的跑车展示会上，向众人炫耀一番．

那么我们该如何度量那些曲线呢？这就是二阶导数 $f''(x)$ 的工作与用途啦．二阶导数其实是一阶导数的导数，即 $(f'(x))'$，也就是一阶导数的变化率；另一个说法是，它是切线斜率的变化率．如果 $f''(x)$ 是个正值，切线的斜率递增，也就表示函数图形的凹口向上（笑脸，见图 15.8）．

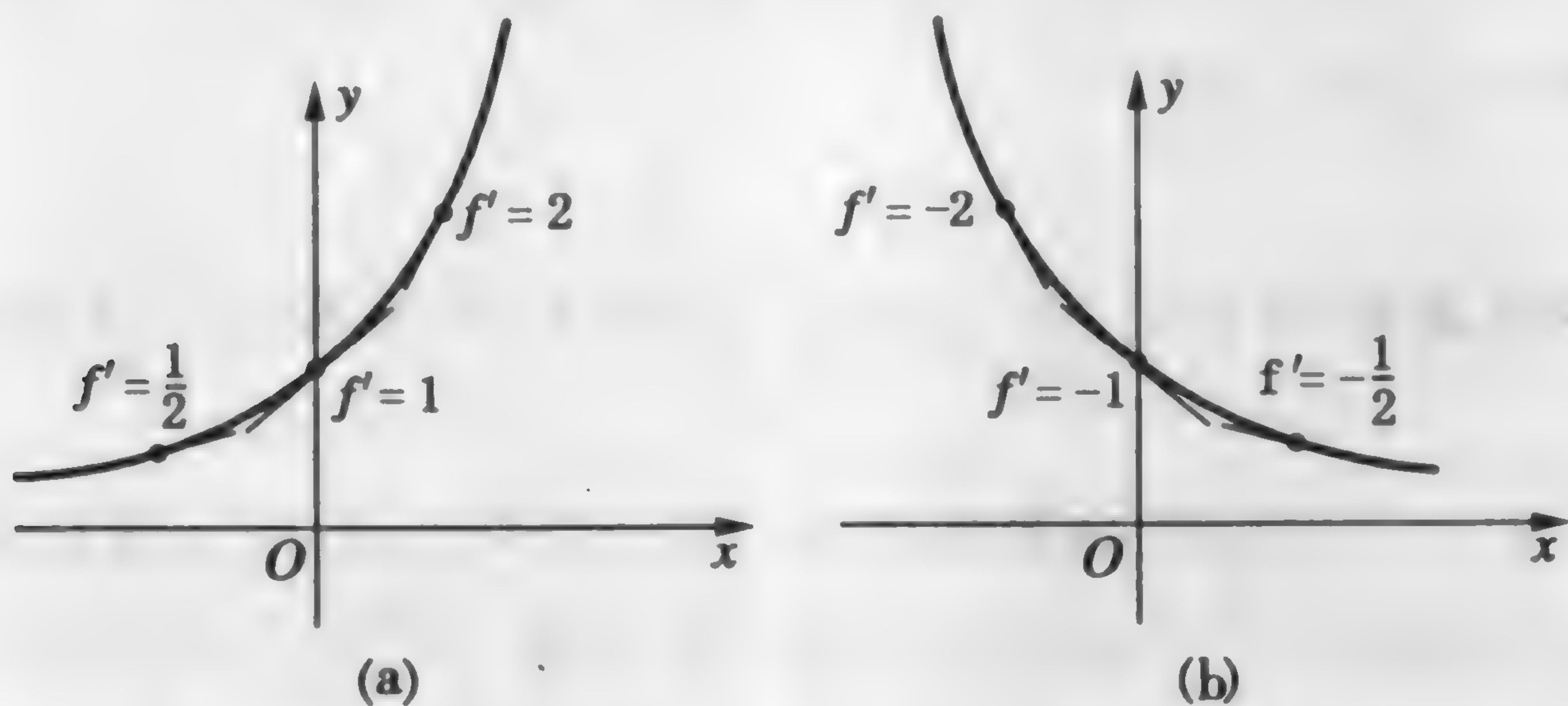


图 15.8 (a) 递增中，凹口向上．(b) 递减中，凹口向上

当 $f''(x)$ 是负值，表示切线的方向也在逐渐变化，但是这一次，负值告诉我们斜率正在递减，于是就得到如图 15.9 所给的一条凹口向下的曲线（哭脸）．

记忆诀窍 想想这段顺口溜："凹口向上……来干一杯．凹口向下……为

何皱眉头?”(好啦好啦，还是老一套．那又怎么样？你到底想不想得高分呀?)

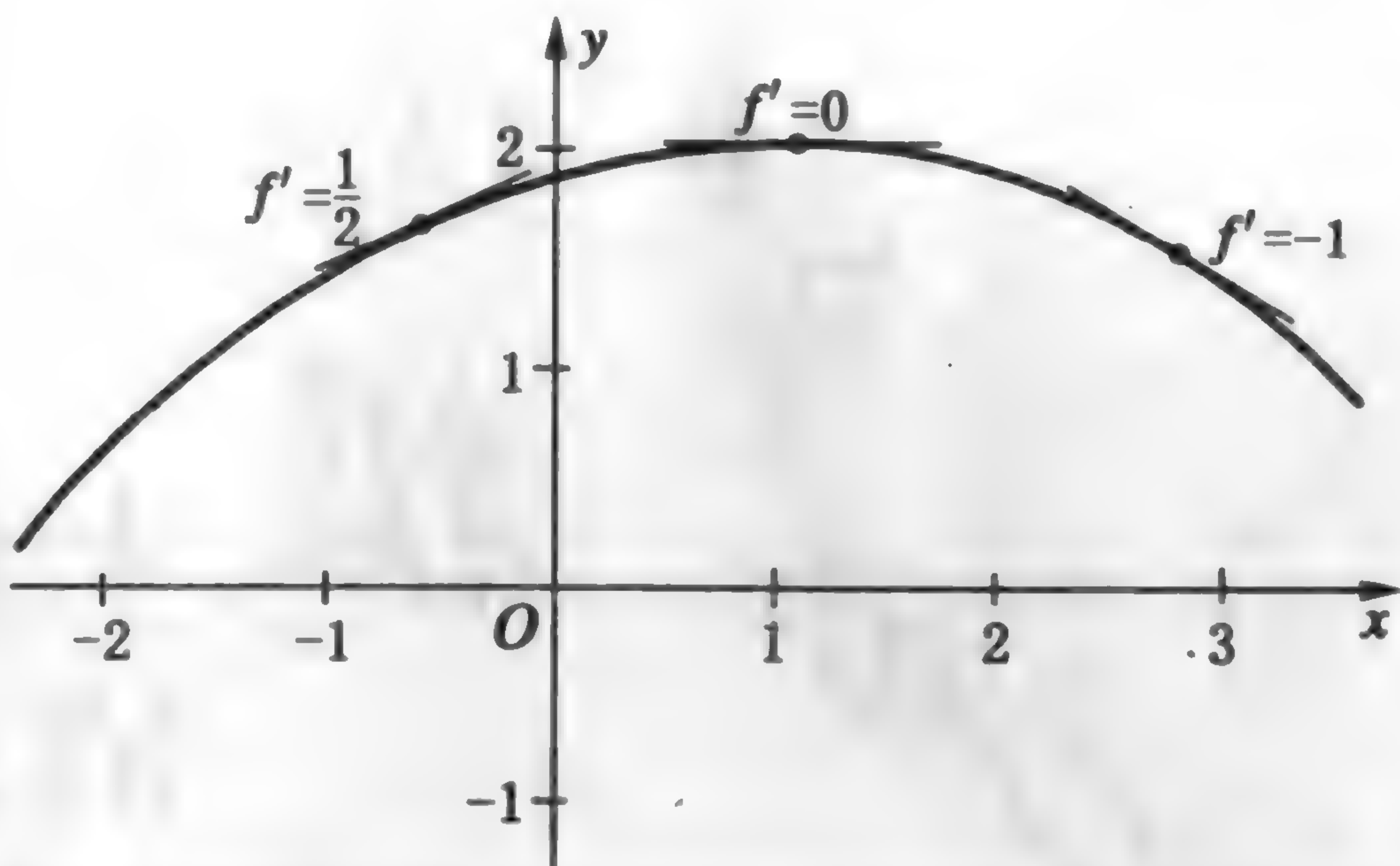


图 15.9　$f''(x)$ 是负数时，表示图形凹口向下

如果 $f''(x)$ 值很大，而且不管是正是负，都表示切线斜率的变化很大，所以画出来的曲线弯曲度很大．反之，如果 $f''(x)$ 值很小，那表示切线斜率的变化很缓慢，图上各点的切线指着差不多同一个方向，因此画出来的图像只有稍微的弯曲.

曲线从凹口向上变成凹口向下，或从凹口向下变成凹口向上的点，我们称为拐点，在拐点上，只有两种情形：$f''(x)=0$，或 $f''(x)$ 根本不存在．在画函数图像的典型考题里，可能会要求你找出一个函数的所有拐点，接着把图形画出来，并标示凹性．在你读过上面这些内容之后，这种题目简直就跟喝汤一样简单.

再回到我们刚才那道例题：

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x+14.$$

因为

$$f''(x)=12x+6,$$

所以可能的拐点在 $x=-\frac{1}{2}$．进一步的计算告诉我们：

$$对\ x<-\frac{1}{2}，f''(x)<0$$

以及

$$对\ x>-\frac{1}{2}，f''(x)>0,$$

所以证明 $x=-\frac{1}{2}$ 的确是一个拐点，而在该点的左边，函数曲线凹口向下，该点右边的曲线则凹口向上.

第16章 极大值与极小值：实用部分

16.1 闭区间上的最大值及最小值

假如我们想求某个函数的最大值，譬如求头皮上毛囊数目的最大值．然而，我们最后得出的头皮上的毛囊数目，是金额 x 的函数，而 x 是我们愿意付给“安乐尼植发沙龙”的植发费用．在这个假设里，我们还必须考虑一些现实问题，那就是我们口袋里面的钱有限，总得存一笔钱，以备老来补牙之用．所以，我们不得不把植发费用 x 的范围限定为 $0 \leqslant x \leqslant 500$（单位：美金）．

现在，我们想知道在区间 $[0, 500]$ 内，毛囊总数函数 $H(x)$ 是否有一个绝对极大值（或最大值）？而对这个 $H(x)$，假设我们已经有一个很明确的函数来表示：$H(x)=12x^2-2\,400x+120\,000$，接下来，我们就可以找出 $H(x)$ 在给定区间内的最大值．

首先我们注意到，在给定的费用限度区间内，该函数跟它的导数处处有定义，所以对区间内的任何一个局部极大值（或局部极小值），都有 $H'(x)=0$．因此，发生最大值的位置只有两种：一是位于其中一个临界点上，一是位于该区间的头尾两端点中之一点（在这个例子中，就是指 $x=0$ 或 $x=500$）．好啦，

经过这么解释之后，你应该知道找出最大值的方法就是：先找出临界点，接着算出各临界点以及区间两端点的函数值，然后取其中最大的那一个值——这就是我们所要的答案啦！

以此例来说，$H'(x)=24x-2400$，令它等于 0 之后，我们就得到 $x=100$ 美金，这是惟一的临界点．接着再一一计算出此临界点以及头尾两端点的毛囊数函数值，我们依序得到 $H(0)=120\ 000$个毛囊、$H(100)=0$ 个毛囊，以及 $H(500)=1\ 920\ 000$个毛囊．所以，毛囊数的最大值显然发生在我们花了 500 美元的时候．换句话说，在你一毛都不肯拔的情况下，你只能维持你原有的 120 000个毛囊，比一般正常数目要少一些；你若是付出了 100 美元，他们开始替你治疗，显然那么一点点钱，只够他们把你所有的头发全部整光．但是如果你肯花掉 500 美元，你的头发不但可以浓密得掩盖住脑袋瓜，甚至还可盖住你的脖子跟背部，明年夏天你的防晒开销可因此节省不少．

16.2　应用问题

好啦！我们现在要进入微积分的实用部分了．研究理论真的非常了不起，叫人向往，每一个搞研究的人，都希望在有生之年能够研究出宇宙的大一统定理，但是那并不是一种可以用来维持生计的可靠职业．在这一节里，我们要解决一些最现实的应用问题，例如“如何用一张长方形硬纸板，做出一个具有最大体积的纸盒?”你听了可能会觉得好笑，殊不知这正是最典型的题目之一，在微积分教科书里经常出现，次数比任何其他的题目都更高．另外，又有谁会忘记那个深受学生喜爱的问题：“如果一位农夫手上有 100 英尺长的围栏，想用它围出一个长方形猪圈，而且这个猪圈的其中一边紧靠着现成的房屋墙壁．试问：若想圈出最大面积的猪圈，长、宽应该各为多少?”

我们知道，你心里会想：在美国，如今仍靠着传统农业谋生的人，在人口比例上已经非常少，少到我们需要用放大镜才勉强看得见．所以，这种题目老早就过时而无关紧要了，是几十年前报童骑自行车送报的时代才需要注意的题目．以美国为例，生猪如今都成了巨无霸事业集团的“产品”和“收成”，这些事业集团拥有整个内布拉斯加州、堪萨斯州及衣阿华州，而昔日的报童，也

已经换成了身穿紧身T恤的成年人，开着锈迹斑斑的老式汽车，仪表板底下还藏着半打罐装啤酒.

但是你得记住，这些取代了末代农夫的“农业公司”，每年都要付给顾问大把大把的银子，拜托这些顾问告诉他们，如何建出最好的猪舍. 至于那些送报的专业机械，也对如何精简送报路线非常有兴趣，因为那样一来，那些老式汽车就可以少跑些路，撑久一些，而公司的开销也会更为节省.

面对这类问题，我们该运用什么理论来解决呢?

记得我们在上一节说过，当函数有一个局部极大值或局部极小值，而且若它的导数存在，则导数为0. 所以，一个函数的绝对极大值或极小值，就在导数为0或导数不存在的点上（这两种点都是临界点），否则就是在定义域的头尾两端点上.

警告 别忘了：最大值或最小值可能出现在端点的其中一点. 譬如说，有个非常愚蠢的问题是这样问的：“假设你有100英尺长的围栏备用，请问面积‘最小’的长方形猪圈，长宽应该是多少?”如果题目没印错，答案当然出现在闭区间[0，100]的端点（也就是长宽都等于0英尺的“猪圈”——这只能圈住出这种题目的蠢猪!）

现在，让我们从最简单但也是很普通的题目做起，并且一边做一边说明，解这类“最大、最小值”问题的各种技巧.

例题 ***试找出两个非负值的实数，让两数的和为66，而且乘积为最大值.***

（解这个问题其实可以不用微积分，但是既然这是微积分课，而且举这个例题出来，是要让各位学习微积分技巧，以便用在其他许多题目上，而不是要向大家证明，我们在没有微积分的困苦条件下如何勉强过日子. 所以，我们在这儿非得使用微积分不可.）

第1步：设变量. 令第一个量是 x，第二个量是 y. 由于两个变量都得是非负的实数，所以

$$x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,$$

请注意，x 跟 y 都必须小于或等于 66.

第 2 步：写出一个函数，以便待会儿可以求它的最大值．在这儿我们选用了英文字母 P 来代表该函数（这个选择不错，因为 P 是“乘积”product 这个英文单词的第一个字母）．按题意，可令

$$P=xy.$$

我们的目的就是要找出 P 的最大值.

第 3 步：把变量之间的关系写出来．题目已经清楚告诉我们：

$$x+y=66.$$

第 4 步：利用第 3 步写出的关系式，把函数 P 的变量数目减少为只有一个．由于 $y=66-x$，我们得到：

$$P=x\ (66-x).$$

第 5 步：找出 P 的临界点．由于

$$P=66x-x^2,$$

因而

$$P'=66-2x.$$

令 $P'=0$，则

$$66-2x=0,$$

$$x=33.$$

表示我们有一个临界点．至于 P 在此 x 值上是极大值、极小值，还是两个都不是？这得等到进入第 6 步才知道.

第 6 步：运用二阶导数检测．取二阶导数之后，得到：

$$P''=-2$$

所以

$$P''(33)=-2<0$$

负数是哭脸、嘴角下弯，因此是极大值．接着我们很快查看一下端点，也就是 $x=0$ 跟 $x=66$，结果发现，两处函数值都等于 0，没有办法跟 $x=33$ 的函数值较量．所以这个极大值就是最大值．因而，$x=33$，而 $y=66-33=33$.

第 7 步：写下最后答案．叫人吃惊的是，许多学生忘记这一步.

我们要找的两个数就是：33 和 33.

读到这里，你九成九又在胡思乱想，不过不用你说，我们也知道你在想什么. 你在想：这有啥了不起，哪儿需要这般费事？我用猜测也可以得到同样的答案. 如果你真是这么想，那表示你很了不起，有超强的能力，可以在“通电热线”之类的节目轻易谋得一份电话咨询工作. 请注意，如果我们把题目稍稍改一下，同样是找出两个非负的实数，让它们的和为 66，但乘积却为最小值，那么答案就会变成在定义域的端点，也即 0 与 66.

此题到此结束，请继续看下题.

例题 你正在北美五大湖之一伊利湖上划着小船，船上载着你未来的小舅子. 此刻，船的位置离湖岸 2 英里远（假设湖岸是笔直的）. 在离你最近的岸边那一点沿岸 6 英里外，你看到了一个流动厕所. 就在这时，你突然觉得想上厕所. 怎么办？现在已是九月，湖水冰冷，所以别想下水. 更何况你的船上还有乘客（尽管他对你的“豪华游艇”毫无好感），要是他不在场，你可以站在船尾，面对湖心，来个就地解决，不过那也得在天气昏暗或湖面雾气很重的时候才有可能，偏偏现在阳光普照，船上的一举一动从岸上都看得一清二楚. 更糟的是，岸边全是房舍，屋主还都认识你的爸妈，巴不得看你出洋相.

所以，你只能循规蹈矩，划到岸边. 好啦，你知道你划船的时速是 2 英里，而在陆地上跑的速度是每小时 6 英里（若在平日不需憋尿的情况下，还能跑得更快些），那么，你应该对准岸边的哪一点划过去，才可在最短的时间内赶到那个流动厕所？

瞧，我们前面不是告诉你微积分很有用吗？在这个例题中，你就可以感受到，微积分的确跟许多切身问题有关，而且你真的会非常想知道答案！

第 1 步：画一幅图，然后再设定变量；上一个例题不需画图，是因为没有什么东西值得画. 图不必画得很仔细，譬如你未来的小舅子，因为跟计算无关，就不必画进去；岸上的风景也不必勾勒出来. 你需要画的只是一条直线，代表湖岸，并在离岸边 2 英里处的湖面上画一个小船，然后在下游 6 英里处画出厕所就可以了. 令 x 为你打算上岸的那一点跟离你最近的岸边那点之间的距

离，那么 $6-x$ 就是你必须沿着岸边跑完的剩下距离；如图16.1所示.

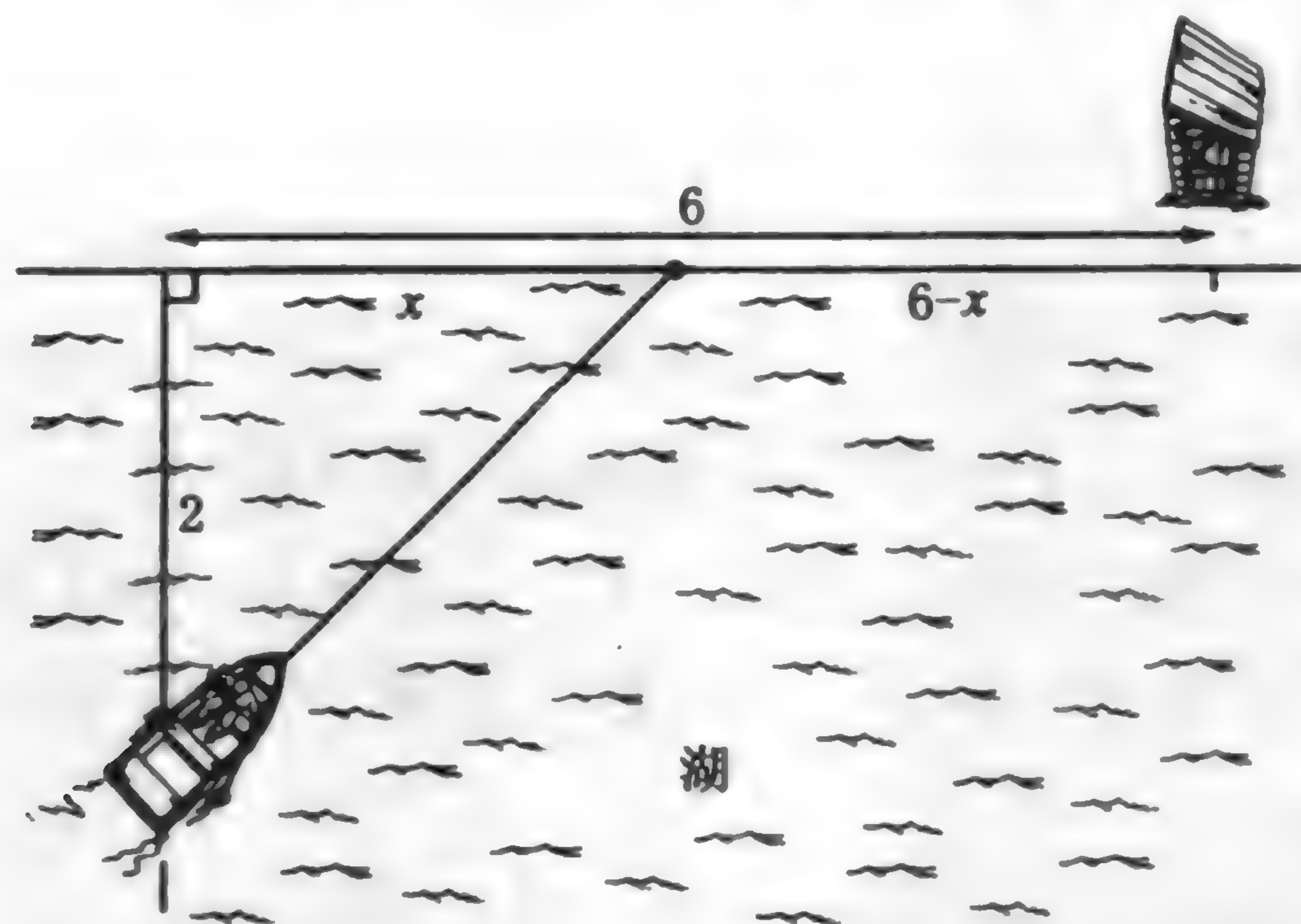


图16.1　问题是：该从哪一点上岸？

第2步：写出欲求最小值的那个函数. 利用勾股定理（直角三角形的斜边平方等于其他两直角边的平方和），你划船经过的距离应该等于：

$$D_w=\sqrt{4+x^2},$$

式子中的 w 代表水路. 为求出你花在划船上的时间，我们可利用以下的关系式：

$$距离=速度\times时间$$

我们求的是时间，也即：

$$时间=距离\div速度.$$

所以你花在划船上的时间就等于：

$$T_w=\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}.$$

另一方面，你得跑 $6-x$ 英里的距离，而你的速度为每小时6英里，所以你花在跑步上的时间是：

$$T_l=\frac{6-x}{6},$$

式子中的l代表陆地. 因此，从你开始向岸边划船到你跑到厕所，整个行程所花费的时间是：

$$T(x)=T_w+T_l=\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{6-x}{6}.$$

请注意，假如你不管三七二十一，直接划到最近的岸边上岸，然后跑完整个路程的话，你得花上 $T(0)=2$ 小时．相反的，如果你压根儿不想跑步，而是把船头对准了流动厕所笔直划过去，也就是 $x=6$，所以你会花 $T(6)\approx 3.16$ 小时．之所以要用微积分，是你极希望愈快到达厕所愈好！

第 3 步：写下变量之间的关系式．在这个例题里，我们只有一个变量，所以在这一步我们不需做任何事情，可以趁机休息 2 秒钟．滴答、滴答，好，时间到！进入下一步．

第 4 步：把变量减少为只剩下一个．这一步也做完了，可再多休息 2 秒钟，然后进入下一步．

第 5 步：找出临界点．先取导数：

$$T(x)=\frac{(4+x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{6-x}{6},$$

$$T'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2}2x-\frac{1}{6},$$

令它等于0：

$$\frac{(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x}{2}-\frac{1}{6}=0.$$

然后解 x：

$$\frac{x}{2(4+x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{6},$$

$$6x=2(4+x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$3x=(4+x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$9x^2=4+x^2,$$

$$8x^2=4,$$

$$x^2=\frac{1}{2},$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707(\text{英里}).$$

第 6 及第 7 步：检验并确定它是最小值，最后把答案写出来．

请注意，在 $x=0$ 跟 $x=6$ 之间只有一个临界点，我们认为它应该就是我们

在寻找的极小值. 当然，我们可以取二阶导数去查明它是还不是，但是在这个情况下实在无此必要，为什么呢？因为我们已经知道，在 $x=0$ 跟 $x=6$ 这两个端点的函数值，而且也知道 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$代入后得到的总时间，会比 $T(0)$与 $T(6)$都来得少，算式如下：

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{4+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}{2}+\frac{6-\frac{1}{\sqrt{2}}}{6}.$$

如果你耐点烦把结果计算出来，就会得到：

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\approx 1.94(\text{小时}).$$

它比 2 小时与 3.16 小时都短，所以没问题，果然就是我们要的极小值. 只是对憋尿时间来说，仍然太久了点. 有了这次经验，希望你以后能事先准备得好一些.

例题　北堪萨斯大学正要建造一条供学生使用的新跑道，运动场的设计是将两个半圆连接在一个长方形的两端，而跑道就沿着整个区域的周边建造，如图 16.2 所示. 只不过由于经费紧缩，学校当局决定利用跑道中间的场地来种玉米. 如果跑道的全长一定得是 440 码，试判定能够使玉米种植面积最大的跑道用地所需的尺寸.

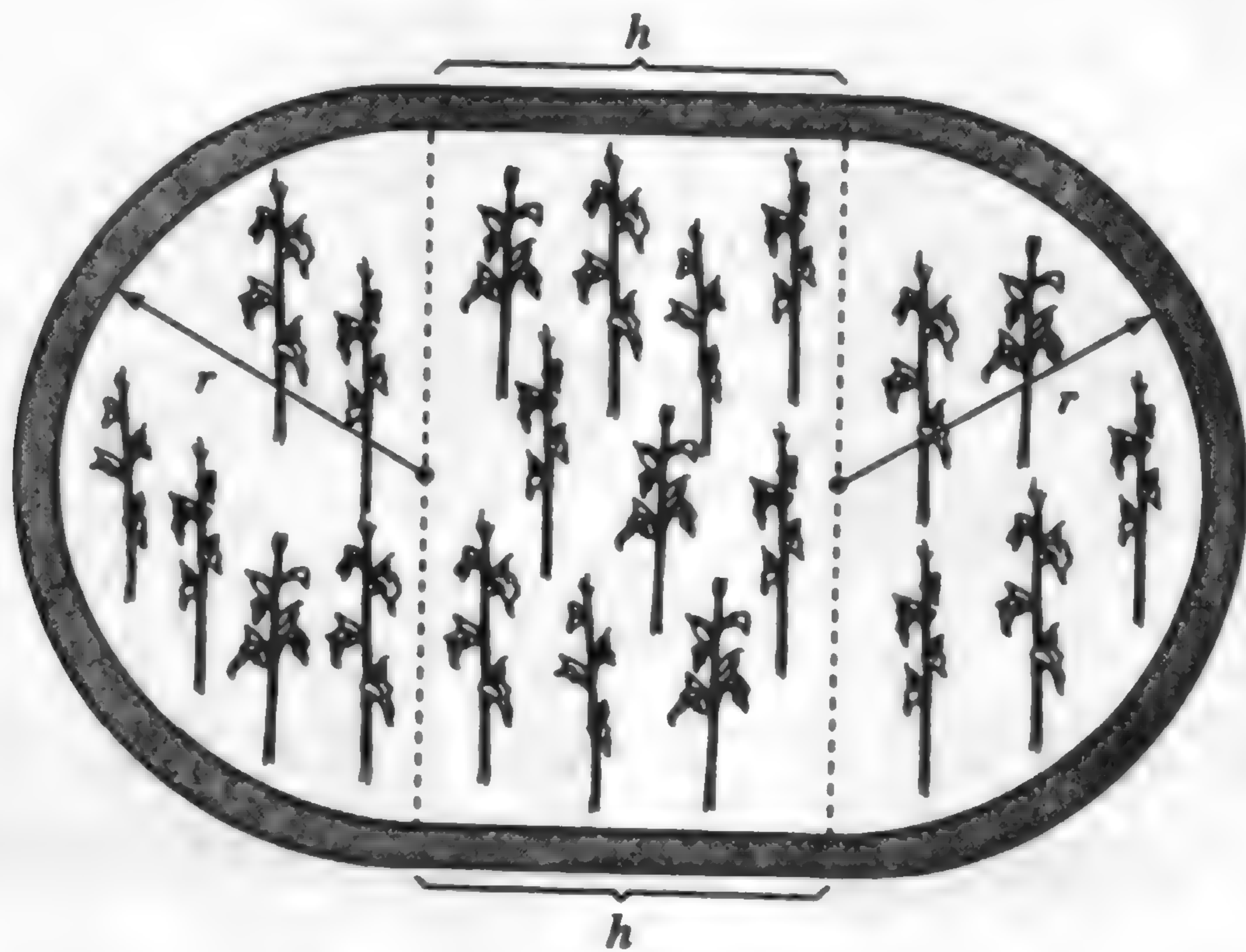


图 16.2　绕着玉米田跑

第 1 步：画图．我们已经替你画好了．瞧，我们一直站在你这边．

第 2 步：写出待会欲求最大值的函数．由于题目要你使跑道中间那块地的面积为最大，因而你需要把那块地的面积函数 A，用圆半径 r 跟长方形宽 h 表示出来．事实上，面积 A 就等于两个半圆的面积（各等于$\frac{\pi r^2}{2}$）及中间的长方形面积（等于 $2rh$）的和，即：

$$A=\pi r^2+2rh.$$

第 3 步：写下所有变量之间的关系式．题目里面就有：我们看到跑道长度为 440 码，这也就告诉我们 r 跟 h 之间的关系，因为跑道是由两段半圆（加起来等于一整个圆，总长为 $2\pi r$）再加上上下两段直线跑道的长度（每一段均等于长方形宽 h，故总长 $2h$），即：

$$440=2\pi r+2h.$$

第 4 步：把函数中的变量减少到一个．从上面的方程式，取 h：

$$h=220-\pi r.$$

把此式子代入前面的函数 A，使它变成仅含变量 r 的函数：

$$A=\pi r^2+2r(220-\pi r).$$

所以，

$$A(r)=440r-\pi r^2.$$

第 5 步：取其导数，并令导数为 0.

$$A'(r)=440r-2\pi r.$$

令它等于 0：

$$440-2\pi r=0.$$

$$r=\frac{220}{\pi}.$$

第 6 步：利用二阶导数检测.

$$A''(r)=-2\pi.$$

从这儿我们看到，无论你用什么 r 值，A''都为负值．记得吧？负值是哭泣，嘴角下弯，所以我们找到的一定是极大值．假如你仍然不放心，你可以去检查头尾两端点.

第 7 步：回答问题．这个题目是个非常好的示范，可以告诉你为何最后一

步非常重要．因为做到目前为止，你搞不好并未领会到出题教授所问的关键句子．这个题目是问："田径场的尺寸为何？"但到目前为止，我们只把 r 计算出来，却忽略了 h，所以我们还需要答出来，当 A 面积最大时，h 是多少．这个容易，由于

$$h=220-\pi r,$$

所以

$$h=220-\pi\left(\frac{220}{\pi}\right)=0.$$

换句话说，你应该大声回答：这个跑道必须是圆的！真是太神奇了，杰克，完全跟我们熟悉的跑道形状大异其趣！（不管你个人对跑道形状的好恶如何，要记住，你无论如何都得写下 r 跟 h 两个值，最好把它们圈起来——可能的话，用显眼的紫色笔最好啦．）

经过了上面 3 个由浅入深的例题之后，我们对最大、最小值问题，应该变得相当得心应手了，所以就不必把每一步骤一一写出来．现在让我们回过头去，试着解决那个老掉牙的猪圈问题．

例题（猪圈问题）　*如果有位农夫手边有 100 英尺长的围栏，他想围出一个长方形的猪圈来，该猪圈的其中一边可利用农场上现成的一长条篱笆．为了让猪圈的面积最大，它的长宽应该各是多少？*

现在呢，别为小猪心烦，这些猪跟解题无关，你得想办法把注意力集中在解题上，别管猪长得是啥样子，重点是猪圈，要画的也是猪圈．一画、两画、再一画，猪圈就画好了，见图 16.3.

猪圈的面积为 $A(x)=x\left(\frac{100-x}{2}\right)=\frac{100x-x^2}{2}$，而由于我们只有 100 英尺围栏可以使用，所以 x 落在闭区间 [0，100] 内．取函数 $A(x)$ 的导数之后，就得到 $A'(x)=\frac{100-2x}{2}=50-x$.

设 $A'(x)=0$，得到 $50-x=0$，故 $x=50$．在两端点，即 $x=0$ 和 $x=100$ 两处，猪圈的面积都等于 0，但在 $x=50$，猪圈面积为 1250 平方英尺，所以



图 16.3 猪圈

$x=50$一定就是我们要找的 x 值．而取二阶导数之后得到 $A''(x)=-1$，再度证明这是一个局部极值．最后，我们还得加上一句："能使猪圈面积最大的尺寸是 50 英尺×25 英尺"，才算大功告成．

那么其他类型的问题呢？譬如下列这个众所周知的纸盒问题：把一张长方形硬纸板（尺寸固定，譬如 5 英尺×8 英尺）的四个角，各剪去同样大小的正方形块，然后把剩下的部分折成一个上方有开口的纸盒．如果剪去的正方形边长为 x，请问 x 等于多少时，折成的纸盒会有最大的容积？这是个经典的题目，你可以自己在家里练习练习．

获取最大利润的各种问题

最后一类常见的问题就是生意问题．

你瞧，现在你都快读完大半本书啦，我们却还没有告诉你如何赚得堆积如山的大量银子．到底什么时候我们才会说明，该怎么让你富有得开始担心自己捐钱捐得手酸？你盼望的日子终于来到了，下面就是啦！让我们一起来发财！

例题（利用人性弱点的获利问题） 你发明了一种以花生酱为主的墨西哥食物新沾酱，于是就在学生活动中心前面摆了个小摊子，贩卖这种用瓶装的粘糊糊的玩意儿．不知怎的，传出了一个谣言（谣言的来源当然追查不到你老兄的头上），说这种粘酱有好的功效，于是销售量节节高升．等销售情况渐趋稳定之后，

你发现以每瓶卖 1 美元的价钱，每天能卖掉 500 瓶；如果价格每提高 5 美分钱，每天就会少卖掉 2 瓶．另外再假设你每天有笔固定开销（保护费）200 美元，而你的成本是每瓶 50 美分钱．试计算：若要获得最大利润，你应该把售价订为多少？

由于你已经知道如何解决这种问题，我们在这儿就只讨论如何把问题建立起来．既然利润是关键，我们就设函数 $P(x)$ 为你每天的利润，其中的 x 是你所订的每瓶售价，另外再设 y 是每日的销售瓶数．依题意，可知 y 随着价格 x 在变，x 每增加 1 美元，y 就减少 40 瓶，因此在售价 x 时的每日销售 y，可写成下列方程式：

$$y=500-40(x-1)=540-40x.$$

你的每日利润应该等于日收入减去同日的成本；收入就是 xy，而成本等于 $200+0.5y$，所以利润就是：

$$P(x)=xy-(200+0.5y)=(x-0.5)y-200.$$

把关系式 $y=540-40x$ 代入上式，我们得到：

$$P(x)=(x-0.5)(540-40x)-200.$$

好了，从这儿之后的步骤就交给你啦，由你去求 $P'(x)$、令它为 0，然后先找出临界点，再找出最佳价格．赚到大钱之路就不远啦！

第17章

隐微分法：咱们就拐弯抹角吧

假设你的老板对你说："我受够了你的无能与不称职，无论什么工作交给你，你都能把它搞砸！现在整个公司已经到了破产边缘，就是承蒙你老兄所赐．现在去把你的办公桌清干净，别让我再看到你的脸！"

听老板这么一说，你可能还想执拗说他并没有明白告诉你："你被开除了！"不错，他的确没有，但他话里的涵义已经非常明显了：他等于已经下了命令叫你卷铺盖走路啦．

同样的，方程式也可能有隐而不显的涵义，譬如：

$$y+x^2-3=0,$$

它其实是在把 y 描述成一个 x 的函数，只是表示得不那么一清二楚罢了．至于清楚的表示法，只需把 x^2-3 移到等号的另一边就成了，也就是$y=-x^2+3$.

更广义地说，任何一个方程式都可能是把 y 表示成 x 的隐函数，甚至当我们没办法把 y 单独拿出来放在等号的一边时也不例外．我们举个例子：

$$y^5+y+x^7+2x=0.$$

上式一样可以把 y 看成是 x 的函数，虽然我们不太可能把它写成 $y=f(x)$ 的形式；这时，如果已知 x 为某个值，我们就可以代入此方程式，解出相对应的 y 值，这样就能看出 y 和 x 的对应关系．

由于我们可以用一个其中有 x 和 y 的方程式，把 y 定义为 x 的隐函数，因而我们也希望能微分这种隐函数．但又因为无法明确知道 y 到底是怎么样的函

数，因此我们只得把整个方程式对 x 微分．在进行微分时，我们用同样的办法去处理 x，但是会把 y 想成是 x 的函数，最后得到导数，将它特别写成$\frac{dy}{dx}$.

例题　下列方程

$$y^2+xy+3x=9$$

把 y 定义为一个 x 的隐函数，试求$\frac{dy}{dx}$.

我们的解法是把这个方程式对 x 微分，而将 y 看成 x 的函数．于是得到

$$2y\frac{dy}{dx}+1\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dx}+3=0.$$

特别注意：当我们微分 y^2 这一项时，需用到前面讲过的链式法则，这样就会得到 $2y\frac{dy}{dx}$. 而在微分 xy 项时，则利用积法则，就可以得到

$$1\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dx}.$$

接下来，我们就用上面的方程式求解$\frac{dy}{dx}$：

$$2y\frac{dy}{dx}+x\cdot\frac{dy}{dx}=-y-3,$$

$$(2y+x)\frac{dy}{dx}=-y-3,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y-3}{2y+x}.$$

喏！这就是此题的答案$\frac{dy}{dx}$啦.

现在，我们还有最后的一点工作得做，也就是要实际算出函数曲线上给定一点的斜率．在这儿我们不仅要把 x 值代进去，还得同时把 y 值也一并代入才行．譬如说，我们要找出曲线上一点（2，1）的导数$\frac{dy}{dx}$，就得把 x 与 y 均代入，得到：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,1)}=\frac{-1-3}{2\cdot1+2}=\frac{-4}{4}=-1.$$

第18章

相关变化率：你变，我跟着变

没错，这类题目有时真的很难缠，许多学生一听到相关变化率问题就吓得半死，为什么呢？也许因为它们是“文字题”，一般学生正是不喜欢文字题，因为要把文字叙述转变成数学式子，对许多人来说是一项不可能的任务．这就好像在他们的脑袋里，掌管这两门科目的部分不能互相沟通，当他们听到文字题的时候，主管数学的那个部分就关闭了．

实际上，相关变化率问题并非那么糟糕，这类问题总共不过分为三大类．在此章，我们将逐一剖析．

首先我们要问：到底什么是相关变化率（related rates）问题？原则上，这种问题里面会有一条方程式涉及两个或两个以上、随着时间而变化的东西或函数，而我们打算找出其中一个函数在某一个时间点上的导数．

且让我们看一个非常无聊但简单易懂的例子．

例题 假设 x 跟 y 都会随着 t（可代表时间）而变化，而且不管 t 是何值，x 跟 y 都满足一个关系式：$\sin x+\cos y=1$．假设你现在的首要任务是找出当 $x=\frac{\pi}{6}$、$y=\frac{\pi}{3}$ 且 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2$ 时的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$．

在这类问题中，我们一定少不了会看到一些与其他量（在此例题中，就是

x、y 跟 $\frac{dx}{dt}$）有关的信息，我们称之为特殊信息.

解题时，我们只需要把包含了 x 与 y 的整个方程式，用上一章讨论过的隐函数微分法对 t 微分. 有一点得特别记住：既然是对 t 微分，我们就必须把 x 与 y 都当做 t 的函数来处理：

$$\sin x + \cos y = 1,$$

$$\cos x \frac{dx}{dt} - \sin y \frac{dy}{dt} = 0.$$

微分之后，再把题目所给的特殊信息，一一代进前面的关系式里，于是得到：

$$\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)2 - \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)\frac{dy}{dt} = 0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dy}{dt} = 0.$$

经过计算、化简之后，就可以解出 $\frac{dy}{dt} = 2$.

这够简单吧？严格说来，这还算不上是个文字题，所以我们用不着从文字叙述里额外找线索，把题目化成方程式. 其实这类题目让人觉得棘手的地方，就是一开始的这道工作，因此一旦你把文字转换成适当的数学方程式之后，就一点也不难啦.

下面是我们解相关变化率的步骤，这套方法非常有效，除了可以解微积分问题之外，还可能用来炖煮鸡汤呢.

相关变化率问题的解法兼鸡汤烹饪法

第一步： 仔细阅读题目. 嘿！我们可不是在开玩笑，你也许不相信，居然会有这等糊涂学生，但事实上，的确有许多人把这一步省略掉！

制作鸡汤的第 1 步：详读鸡汤罐头上的说明. 同样地，许多人也会跳过这一步，对此你可能不大相信. 要知道，鸡汤罐头的制造厂商，为了撰写罐头上不到 10 秒钟就可以读完的 3 行说明文字，付了数百万美元给一个包括知名大厨、大学毕业生以及行销研究人员的专家团队，结果几乎没有任何消费者会去读它，你说冤不冤？

第二步： 拿笔来画一张图，图中要表示出题意 ，请注意，所画的图只需

把题意表明即可，用不着花时间去计较细节．画好之后，替所有相关的量取一个名称或符号．

制作鸡汤的第 2 步：拿个平底锅，把罐头里的浓稠汤料倒进锅内．如果不小心全倒在地板上了，没关系，把地板清理干净，再拿出一罐，重新做起．

第三步：根据你画的图，在你刚命名过的变量之间找出一般式．

制作鸡汤的第 3 步：把平底锅放在炉子上，找一找该开哪一个电炉（或煤气炉）开关；复杂一些的炉子会有三四个开关，甚至外加烤箱开关、计时开关等等，通常这种比较复杂的炉子上都会有一个简图，你可以按图索骥，找到正确的开关．

第四步：一一找出你所需要的特殊信息，写下来，并画个长方形框框，注明是"特殊信息"．此外，在同一个框框内加上你想要知道的量（这回是某个变量的导数）和一个"?"号．

制作鸡汤的第 4 步：转动平底锅所在的炉子开关．

第五步：把方程式两边对时间微分；得到的式子里面会含有至少两个导数．

制作鸡汤的第 5 步：根据指定火候时间，加热鸡汤．

第六步：把特殊信息一一代入微分后得到的式子里（这一步必须在第五步完成之后才能进行！），然后解出所求的未知量．

制作鸡汤的第 6 步：如果在你开启了开关数分钟之后，锅子尚未发热，表示你得插电．不过，如果你闻到了煤气味，表示你用的不是电炉，这时就别管插不插电了，赶紧夺门逃命去吧．

第七步：写下你的答案，并且用紫色的笔圈起来．然后不妨去喝点鸡汤，这对答案不会有什么不良影响．

制作鸡汤的第 7 步：你说你已经喝过了？怎么可能？你是不是不喜欢喝鸡汤？

好啦，让我们按照这些步骤来试解一题吧．首先，也许我们该瞧瞧这类问题中最普遍的一个类型，称为"相似三角形相关变化率问题"．

例题（大脚野人问题） 北美传说中的"大脚"野人（Bigfoot）在夜间走出

了山林，不知不觉晃荡到了西雅图的大街上．这位老兄全身毛茸茸的，体重高达 441 磅，身高整整 8 英尺，在昏暗的街灯下，貌似身材特大号、一副邋遢不堪的摇滚歌手．这是他第一次来到这么一座大城市．有一盏路灯引起了他的注意，他以每秒 2 英尺的速度朝着路灯的方向走去．假设那盏路灯的高度是 12 英尺，那么当“大脚”走到离路灯底座 6 英尺远的时候，他在地上的影子长度的变化率是多少？

好啦好啦！趁你还没冒火之前，我们先坦承我们自己也不太清楚为什么要解这么奇怪的问题．究竟是谁的脑筋出了毛病，居然关心起“大脚”野人的影子变化得有多快？尤其是这个题目暗示了，再过几秒钟，这个毛手毛脚的大家伙就要摧毁那附近惟一的一盏路灯了，而且天色早暗了，他的破坏举动无疑会让四周陷入一片黑暗，变成他打猎的理想环境，而我们仍旧呆站在离他不远的街角，手里拿着本子和铅笔，心无旁骛地计算他的影子长度吗？好问题！

但是，这就是数学，没有人说数学例题一定要切合现实，此其一．正由于例题的荒诞不经，才可以让学生印象更为深刻，而更具教学效果，此其二．还有，你总听过潜能吧？只要你熟练了这类题目，在危急时就有办法在一两秒钟之内，想出解法，算出答案，然后趁“大脚”还没打破路灯之前，赶快逃离此地．

这样的解释你还算满意吗？我们现在就开始一步步解题吧．

第 1 步：把问题好好阅读一遍；可能的话，多读几遍也无妨．请注意，不是所有的信息都跟解题相干，譬如“大脚”的体重．

第 2 步：画一个如图 18.1 所示的图；用不着把大脚野人的身材相貌都描绘出来，不过如果有足够的时间，你爱怎么画就怎么画．请记住，此图应该要能够代表一般情况：无论在何时，“大脚”的身高都维持在 8 英尺，而路灯离地高度是 12 英尺，所以我们可以把这两个数字标示在图上．

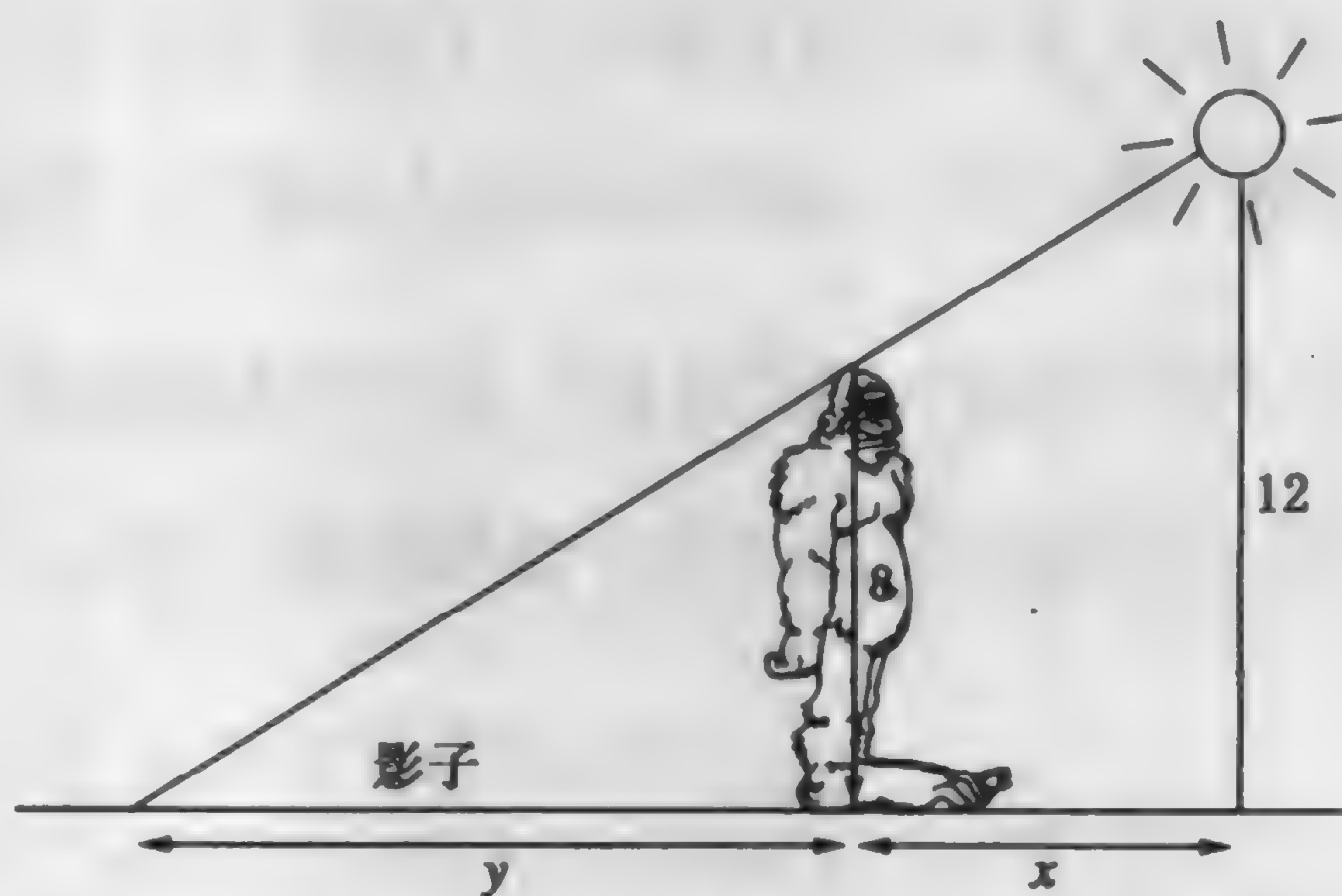


图 18.1　大脚野人发现了电

那么在一般情况下，变动的部分又是什么呢？这个嘛，题目已明白告诉我们，“大脚”正走向路灯，意指“大脚”跟灯柱底座之间的距离在变．好啦，我们把这段在变化的距离设为 x．至于应该从“大脚”身上的哪一点，去度量这段距离，就别问了．

当然，我们有兴趣的是影子，所以不妨把影子的长度设为 y．吹毛求疵的人也许会问，图上的其他部分呢？要不要也设几个变量呢？实际上不用，因为这对我们的计算过程毫无影响，多一个变量只会混淆视听．还有，要记住，我们现在是分秒必争，情况危急，岂能把宝贵的时间浪费在不重要的芝麻绿豆上呀？

第 3 步：找出与变量有关的一般方程．在此例中，我们注意到有两个直角三角形，其中一个以 y（影子）为底边，其高为 8 英尺（“大脚”的身高）；另一个则以 $x+y$（从影子最远点到灯柱底座的距离）为底边，其高为 12 英尺（灯柱的高度）．因为这两个三角形的三个角全等，所以它们是相似三角形，所以对应的边的比率也应该相等：

$$\frac{8}{y}=\frac{12}{x+y}.$$

$$8(x+y)=12y,$$

$$8x=4y,$$

$$2x=y.$$

第 4 步：写下特殊信息．依据题意，我们想知道：当这位喜马拉雅山雪人的远亲走到离灯柱 6 英尺时（也即 $x=6$ 时），影子长度（即 y）的变化率，也就是 y 的导数．用数学的语言来说就是，我们想知道 $\frac{dy}{dt}$ 在 $x=6$ 时的值．又因为题目说“大脚”正以每秒 2 英尺的速度朝着灯柱走去，所以我们知道 $\frac{dx}{dt}=-2$．别忘了在长方框内注明“特殊信息”字样．

特殊信息：$x=6$，$\frac{dx}{dt}=-2$，$\frac{dy}{dt}=?$

第 5 步：用隐函数微分法去对第 3 步得到的一般式微分．

$$2\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}.$$

这个隐函数微分真是不同寻常！

第 6 步：把特殊信息代入：

$$2(-2)=\frac{dy}{dt},$$

所以$\frac{dy}{dt}=-4$. 本题的答案就是：当“大脚”距离灯柱底座 6 英尺远时，他的影子正以每秒 4 英尺的速度缩短.

第 7 步：用紫色的笔把答案圈起来.

接着让我们瞧瞧另一类相关变化率问题：这类问题牵涉把某种物质放进一个容器或是从容器中取出来，我们想知道在此放或取的过程中，容器内物质的体积变化，跟其他如高度或半径等数量之间的关系. 我们把这类问题取名为“酒桶问题”.

例题（酒桶问题） 假设住在山林里的宁芙女神和半人半兽的森林之神，以祝贺酒神为借口，进行一次热闹的聚会. 他们用一个特大号的倒立圆锥形酒桶盛酒，锥尖处有个龙头开关，且酒桶深 12 英尺，顶端半径为 6 英尺. 如果我们假设整个聚会的总耗酒量很平均，每小时喝掉 6 立方英尺，那么请问：当桶内美酒的深度只剩 4 英尺时，该深度的变化率为若干？

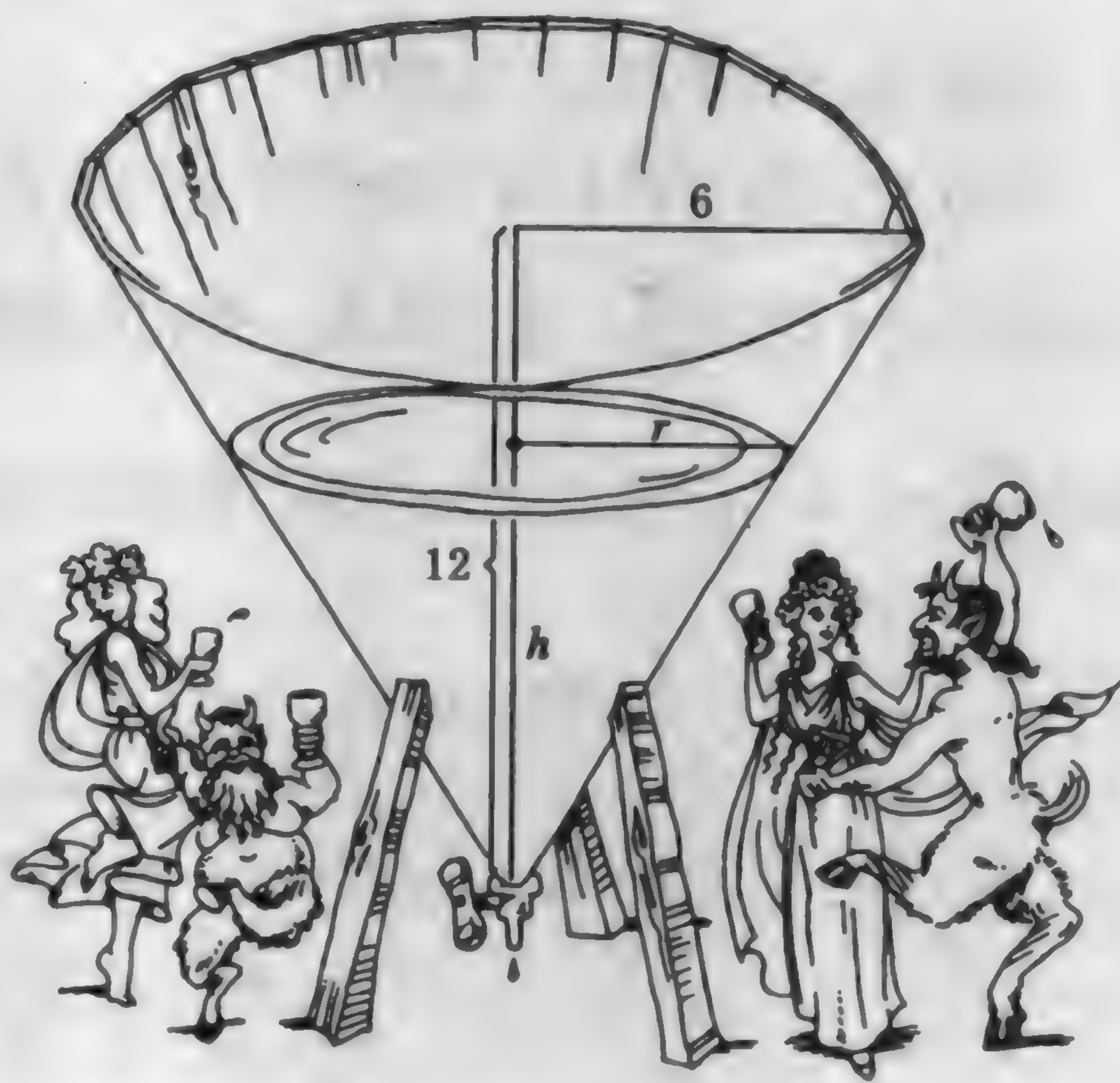


图 18.2 饮酒作乐的宁芙女神和森林之神

第 1 步：仔细阅读问题. 假设你刚刚阅读完毕.

第 2 步：画一个圆锥形酒桶的简图（如图 18.2）. 正在饮酒作乐的宁芙女神跟森林之神，可画可不画. 至于整个酒桶的高度和半径，由于在问题中维持不变，所以可以在图上

标明．聚会进行时，桶中酒的深度以及存酒表面的半径，会随着时间而变化，所以不妨分别设成变数 h（代表高度）和 r，这些就是我们需标出的全部变量了．

第 3 步：找出变量之间的一般式．这部分有点难．由于目的是要找出体积变化跟酒深变化之间的关系，所以我们需要一个体积跟深度的关系式，但是图上压根儿没提到体积．

幸好，我们在高中学过，圆锥的体积 V 有一个公式，那就是 $V=\frac{\pi r^2 h}{3}$（这非常好记：圆锥体积等于高为 h、底圆半径为 r 的圆柱体体积的 $\frac{1}{3}$）．

不巧的是，这个方程式里面有两个变量，即 r 跟 h，而不是只有 h．不过这点容易解决，依据我们所画的图，可看出 r 与 h 之间有个很漂亮的关系，可用来去掉其中的 r．

怎么说呢？跟大脚野人例题一样，你可以注意到图 18.2 里也有一对相似三角形，因而 $\frac{r}{h}=\frac{6}{12}$，故 $r=\frac{h}{2}$．我们再把这个结果，代入上面的体积一般式，就会得到：

$$V=\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2\frac{h}{3}=\frac{\pi h^3}{12}.$$

这就是我们要找的一般式．

第 4 步：写下我们有兴趣的那个时间点上的特殊信息．换句话说，我们想知道在 $h=4$ 时的 $\frac{dh}{dt}$．依据题意，酒的消耗速率一直维持在每小时 6 立方英尺，亦即 $\frac{dV}{dt}=-6$（负值表示桶内的存酒体积在减少）．

特殊信息：$h=4$，$\frac{dV}{dt}=-6$，$\frac{dh}{dt}=?$

第 5 步：我们把第 3 步得到的一般式两边对 t 微分，就得到：

$$\frac{dV}{dt}=\pi\frac{3h^2}{12}\frac{dh}{dt}$$

（此处我们用的是链式法则）．化简后可得到：

$$\frac{dV}{dt}=\pi\frac{h^2}{4}\frac{dh}{dt}.$$

第 6 步：把特殊信息代入上式，并解$\frac{dh}{dt}$.

$$-6=\pi\frac{4^2}{4}\frac{dh}{dt},$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{-3}{2\pi}\approx-0.477(\text{英尺/小时}).$$

所以在我们指定的那一刻，酒桶内的酒平面正以略少于每小时半英尺的速率下降. 只不过从这个数字里，我们无法看出，究竟哪个人喝得比别人多……

最后一个类型的相关变化率问题，叫做“勾股定理型问题”.

例题（跟踪不明飞行物） 电视节目“非自然经验与叫人作呕的外星人”宣称他们拍摄到一架定速飞过头顶的不明飞行物，在拍摄时该不明飞行物离地高度保持 3 英里. 他们还宣称，他们是在不明飞行物已经越过了头顶上空，又水平飞行了 4 英里之后，才用照相机捕捉下这个画面的（相片里面的不明飞行物看起来极像一支非常模糊的雪茄，雪茄上的商标若隐若现）. 他们又说，在拍摄相片的同时，雷达测速器的读数显示不明飞行物与照相者之间的距离，正以每小时 384 英里的速度在增加. 请问当时那不明飞行物或雪茄的飞行时速为多少？

第 1 步：对啦！先熟读问题.

第 2 步：画图（如图 18.3）. 我们不妨设不明飞行物离照相者的水平距离为 x，而两者的实际距离为 h. 尽量不要把 x 设定为快门按下的当时的水平距离. 为什么呢？请记住，这个图必须代表一般的情况，而不要设定在任何一个特定时刻.

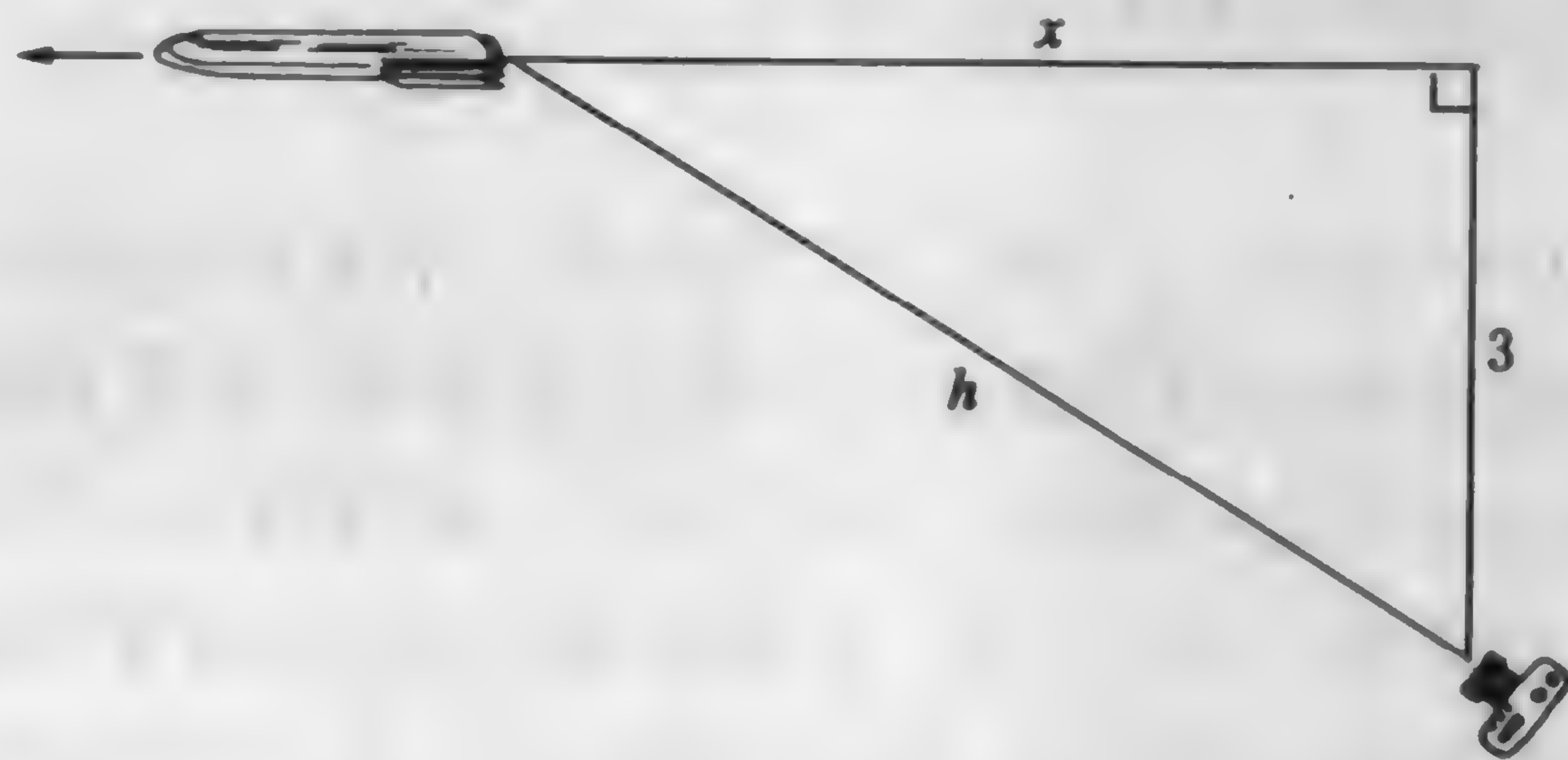


图 18.3　拍摄不明飞行物

第 3 步：找出一般式. 对此，我们得感谢毕达哥拉斯这位古希腊人，谁也没想到这位身上仅裹着一张床单的人物，居然能够把直角三角形的三边关系搞清楚！由于图里面有个直角三角形，根据毕氏定理（即勾股定理），我们知道 $3^2+x^2=h^2$.

第 4 步：决定出我们有兴趣的那个时刻，也就是按下快门照相的那一刻的特殊信息. 题目告诉我们，在那一刻，$x=4$. 把这个 x 值代入上面的一般式，就可以算出同一时刻的 h 值：

$$3^2+4^2=h^2.$$

所以 $25=h^2$，即 $h=5$. 我们从题目里，还得知当时 h 的变化率，也就是 $\frac{dh}{dt}=384$. 综合以上所知，我们就得到：

特殊信息：$x=4$，$h=5$，$\frac{dh}{dt}=384$，$\frac{dx}{dt}=?$

第 5 步：将一般式 $9+x^2=h^2$ 两边对 t 微分，得到

$$2x\frac{dx}{dt}=2h\frac{dh}{dt},$$

$$x\frac{dx}{dt}=h\frac{dh}{dt}.$$

第 6 步：把特殊信息代入上式，就得到：

$$4\frac{dx}{dt}=5\times384.$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{5\times384}{4}=480(\text{英里/小时}).$$

哇！这支廉价雪茄可飞得真够快呀！

附记：许多科学家指出，不明飞行物外壳上不太可能会印有 El Corona 字样，因而他们要求跟拍照的人谈谈. 面对此项要求，该节目制作人的回答就是，外星人对隐私被侵犯非常恼火，因此采取了报复措施，已经把照相者变成一摊狗仔酱啦！这场第三类“几乎”接触的闹剧就这样草草落幕了.

绝大多数的相关变化率问题，都可以归类到上述 3 种类型里面.

第19章 求近似值：评估你的成名之路

能够快速做出各种评估，是你在这世界上能够成功的重要法门之一．譬如你在开车，看到油表的指针指到底了，这时你就得马上估计你在汽油耗光之前，还可以开多远．又如在你搭电梯的时候，当电梯门一开，你得一眼就瞧出，你站进去之后是否会超重．还有就是，假若你在微积分课堂上结识的新朋友开口约你，说是要同你到恳丁来个二日游，这时你也得在极短的时间内做个评估，决定你们两人合适不合适．

同样地，在你做数学问题时，经常会需要估计一些函数在实际值未知的点的函数值．事实上，这种函数几乎是到处充斥，而且有许多函数在大部分的点的函数值，十分难以计算．让我们随便举出一两个简单例子：比如$\sqrt{4.1}$或者$\sin 44°$，你能否直接用心算算出它们的值是多少？算不出来吧？别觉得难过，我们这些吃数学饭的教授一样不知道！

当然，如果手边有计算器，我们只消在键盘上按几下，顿时就能够得到有8位小数的答案，让你不由得拍案惊叹计算器的能耐．你可能以为，计算器是把所有初等函数的值全背了下来，所以才能这么快速的给出答案来．但是试想，你得把多少个 x 值输进计算器里去？少说也有好几个数十亿吧，而计算器存储器相当有限，根本不可能储存这么多个$\sqrt{x}$ 与 $\sin x$ 的值！

相反的，计算器另有一套系统，可用估计的方法把每个答案计算出来．这是怎么回事呢？其实，在你把问题的要求键入之后，计算器就开始了一连串运

算，计算出一个估计值，然后再确保这个估计值精确到小数点后第 8 位.

现在我们就用$\sqrt{4.1}$为例，来见识这套估计法. 我们首先会注意到，在 4.1 的附近不远处有个特别的 x 值，每个人都知道它的$\sqrt{x}$等于多少，那就是$\sqrt{4}=2$. 我们不妨把 2 当作第一个估计值，但是这个估计值吓不了人，我们势必要稍加调整，使得此估计值更接近$\sqrt{4.1}$的实际值. 让我们看看图 19.1.

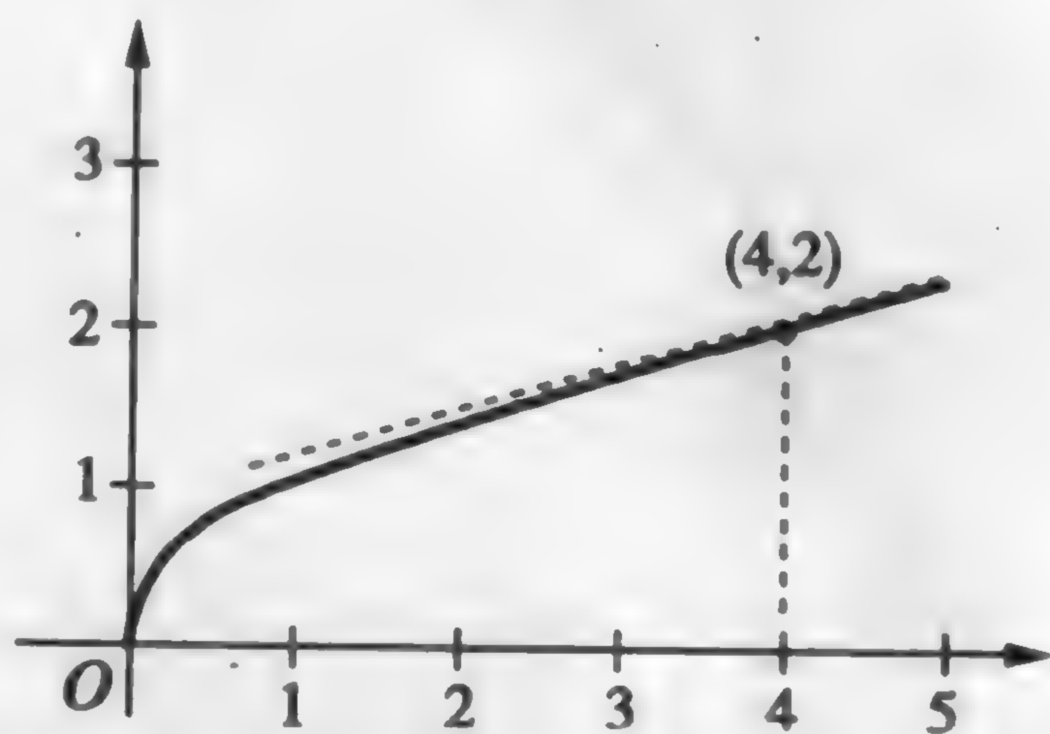


图 19.1 平方根函数

图 19.1 表示当 $x=4$ 的时候，函数 $f(x)=\sqrt{x}$的值刚好等于 2，而当 $x=4.1$ 时，函数值显然比 2 稍微大一点. 那么究竟大多少呢？我们可以取在 $x=4$ 那一点上的切线，然后把它延长到 $x=4.1$ 处. 由于这条切线在 $x=4$ 附近，跟 $f(x)=\sqrt{x}$的原曲线相当接近，因此我们可以把该切线从 $x=4$ 到 $x=4.1$ 所新增的高度，加到第一估计值 2 上，这样就能得到更接近 $f(4.1)$实际值的逼近值啦!

那么，新增的高度又是多少呢？我们已经有一条带有斜率的直线，也知道了 x 的变化量，即 0.1，因此我们可得知 y 的变化量；三者的关系如下：

$$\frac{y\text{的变化量}}{x\text{的变化量}}=\text{斜率}.$$

那么这条切线的斜率又是多少呢？当然就是 $f(x)=\sqrt{x}$在 $x=4$ 的导数嘛. 因而

$$f'(x)=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}},$$

$$f'(4)=\frac{1}{4}.$$

所以，当我们沿着该切线从 $x=4$ 移动到 $x=4.1$ 时，高度变化就等于 $0.1\times\frac{1}{4}=0.025$. 也就是说，我们估计的值约为 $2+0.025=2.025$. 如果你去

拿一个计算器来实地印证一下，$\sqrt{4.1}$求到小数点后第四位的答案会是 2.0248. 哇！跟我们新得到的逼近值非常接近. 在今天的某些国家里，这样的精确程度堪称奇迹呢！

现在让我们来看看一般的逼近问题. 假设我们知道函数 $y=f(x)$在某一点 x 的值，但是我们却对 x 附近的另外一点 $x+\Delta x$ 的函数值非常有兴趣. 我们可以把这个 Δx 想成一个非常小的量，就像前面例题里的 0.1，于是我们要找的就是函数 f 在 $x+\Delta x$ 的近似值，也就是 $f(x+\Delta x)$的近似值.

在点 x，我们知道它的函数值为 $f(x)$，我们假设此值是一可求得的量. 这个逼近法的关键，就是要在 $y=f(x)$的图像曲线上，画一条通过点$(x, f(x))$的切线（见图 19.2）. 由于该切线的斜率是 $f'(x)$，所以，我们需要加在 $f(x)$上的高度，应该就是切线斜率乘上 x 的变化量，也就是 $f'(x)\Delta x$.

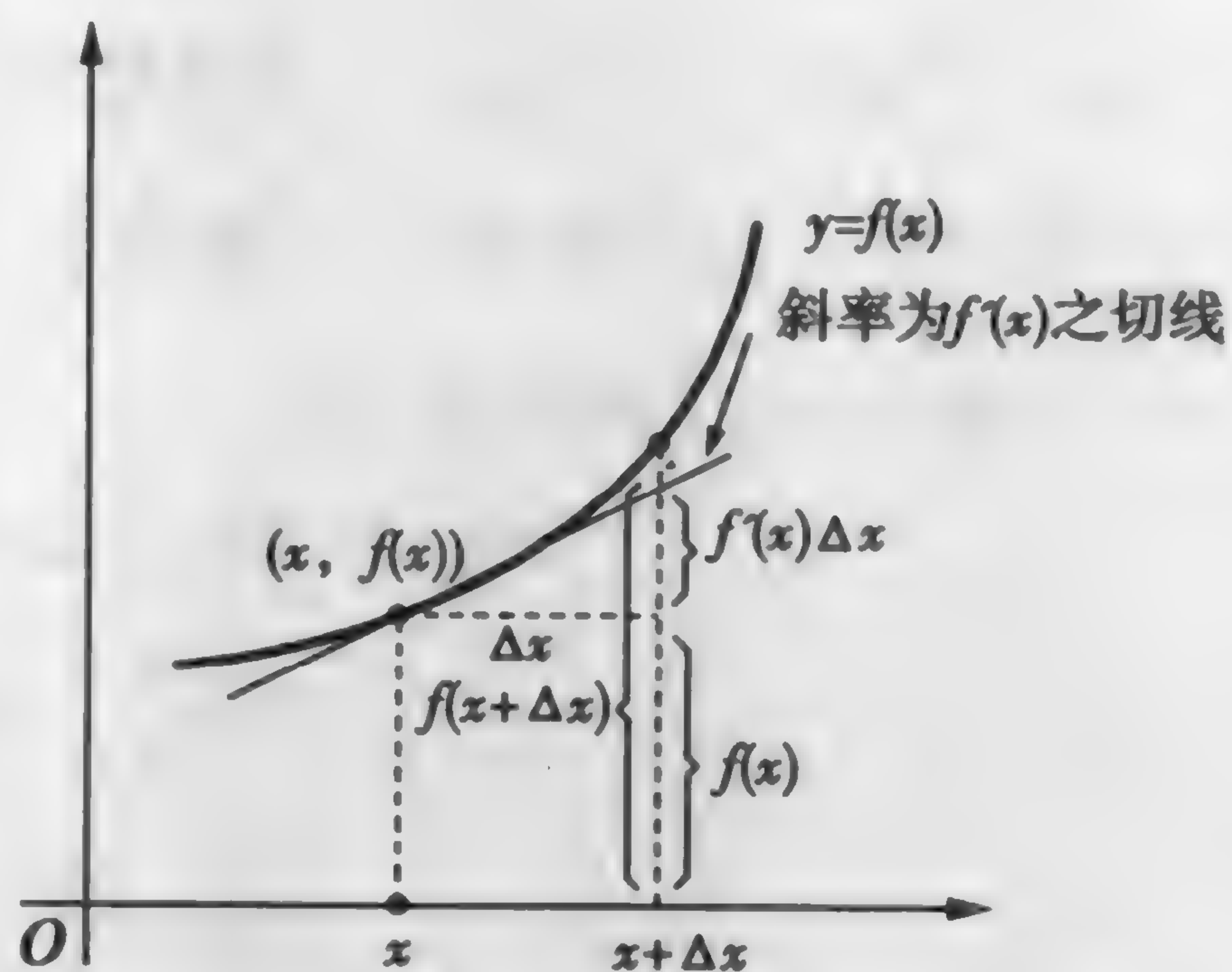


图 19.2　逼近 $f(x+\Delta x)$

把以上的叙述综合起来写成数学式，就成了：

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x.$$

利用这个短短的公式，你就可以逼近函数 $f(x)$在各个点上的近似值.

练熟了这个逼近法以后，你倒是可以拿它来跟人搭讪呢！试想你在一场聚会里，一眼瞧见大厅对面人堆中，有位衣着光鲜的帅哥. 于是你装作没事一样，不露声色地跟他擦身而过，接着趁机冲他一笑，不经意的问他："你可知道 sin44°等于多少？"这位帅哥听你这么一问，马上从口袋里掏出一个计算器，但是很不凑巧，竟发现电池

耗光啦，于是一脸尴尬．这时，你反而安慰他说："别在意！容我向你借支铅笔和一张纸吧，让小女子我帮你解围．"

例题 求 $\sin 44°$ 的近似值．

我们的函数是 $f(x)=\sin x$，所以 $f'(x)=\cos x$．虽然我们不知道在 $44°$ 的 $\sin x$ 是多少，但是我们知道 $\sin 45°=\sqrt{2}/2$．所以我们可以把第一近似值设定为 $x=45°$，而 $\Delta x=-1°$．

这儿有个非常重要的注意事项，那就是只要涉及微积分计算，角度的单位一定得用弧度，而不是度．如果用度，三角函数的导数就会出问题．所以在进入计算之前，我们必须把 $45°$ 变成 $\frac{\pi}{4}$，把 $-1°$ 变成 $-\frac{\pi}{180}$．

于是乎，我们就可得到：

$$\sin 44°=f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x=$$

$$\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\left(-\frac{\pi}{180}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right)=0.694765.$$

这个近似值到底有多近似呢？随便拿个计算器来输入 $\sin 44°$ 之后，屏幕上出现的答案是 0.69465837，由此可以看出，我们算出的近似值精确到小数点后的第三位，真是非常了不起！

如果你脸不红、气不喘的一连做出了好几个近似值，保证你那帅哥朋友以后就会像只哈巴狗似的，跟在你的身边啦！当然，用不到一个星期的交往，你就会了解：以貌取人，将好比你浪费许多宝贵的时间，去讨论"流星花园"的剧情．

第20章 介值定理与中值定理

20.1　介值定理：面包中间没夹东西就不叫三明治

好啦！这个定理看起来没什么学问，不过你若是不欣赏这个说法，不理会它也不要紧．定理名称里的“介”就讲得够清楚了，意思就是，介于其间的值．

让我们举个例子来说明．假设你 15 岁时体重为 120 磅，现在你是 45 岁，体重已经到达 250 磅．（对这个例子，最好就别画图了，免得画出来的体形有碍观瞻！）那么在这 30 年间，一定有一段时刻你的体重是 200 磅，对吧？道理很简单，不管你的体重如何变化，从 120 磅变成 250 磅的过程中，绝对躲不了跨越 200 磅的这一关．或许你还能清楚记得，那一块害你冲破 200 磅大关的巧克力蛋糕．不管怎么说，介值定理（intermediate value theorem）讲的就是这个．

若以数学的说法则是，如果在 $[a, b]$ 区间上有一个连续函数 f，且 p 是介于 $f(a)$ 跟 $f(b)$ 之间的任何一个函数值，则在 $[a, b]$ 区间上必须存在一个数 c，使得 $f(c)=p$（在我们所举的例子中，此连续函数就是随着年龄在变化的体重，而你的年龄就落在闭区间 $[15, 45]$ 上，另外我们取 $p=200$，为介

于 120 及 250 之间的一个值，因此在你从 15 岁到 45 岁之间，一定有一个时刻的体重刚好等于 200 磅）.

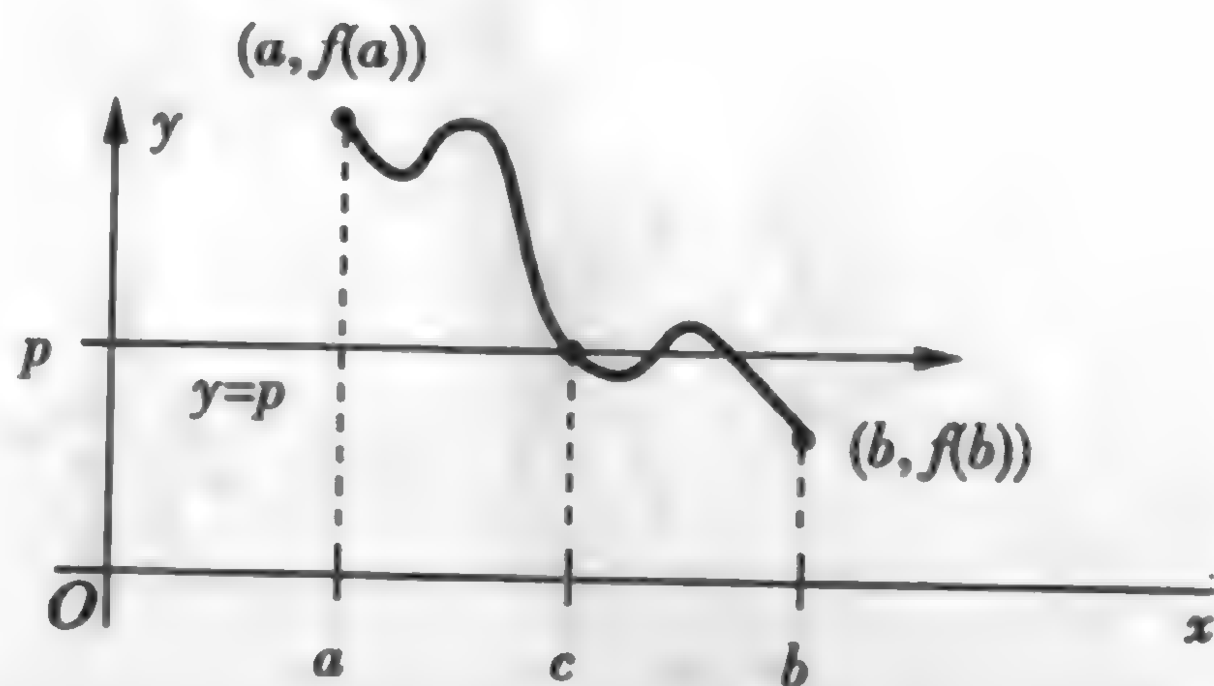


图 20.1　此函数图像必会跨越 $y=p$ 这条直线至少一次

从函数图像来看（见图 20.1），这个定理就是说，若函数 f 在区间 $[a, b]$ 上连续，而 p 为 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一个值，则高度为 $y=p$ 的水平线，一定会在 x 坐标为 a 和 b 的范围之间，与 $y=f(x)$ 的曲线至少相交一次，我们称这个交点为 c. 水平线与函数曲线有可能相交不止一次，因而交点可能不止一个，但我们可以任选其中之一，把它叫做 c.

这个定理看起来虽然是不证自明的，但若真要去有板有眼的证明出来，还相当不简单呢！微积分入门课程的教师，一般都不会在课堂上讲解这个定理的证明，除非他们来自另一个星球，而且不是离地球很近的星球.

那么我们该怎么应用这个定理呢？

假设我们想知道函数 $f(x)=x^4-7x^3-4x+8$ 是否有可能等于 0. 由于这个函数是个多项式，我们知道它处处连续. 另外，当 $x=-1$ 时，我们得到 $f(-1)=20$，而当 $x=1$ 时，我们得到 $f(1)=-2$；换句话说，在区间 $[-1, 1]$ 的两个端点，函数值分别为 20 与 -2. 介值定理告诉了我们，当 x 在 -1 与 1 之间变化时，函数值一定得扫过 20 与 -2 之间的每一个值，特别是 0 这个值，在 $[-1, 1]$ 区间上的某个 x 的函数值必为 0. 介值定理并不会告诉我们，该函数究竟在何处等于 0，但是它明白告诉我们在 $[-1, 1]$ 区间上，一定有某个地方的函数值等于 0.

20.2　中值定理：陡就是陡

那一天，生意清淡，突然办公室里电话铃响，我拿起话筒说："这儿是微积分智囊库，有什么需要帮忙的吗？"原来是本地的游乐园打来的，他们正准备建造新的游乐项目，是一种很有刺激感的新型轨道，起点跟终点都设在地面上，他们打算取名为过山车.

使游乐园员工怀疑的是它的设计，他们希望来玩的人果真能随着列车疾速上冲、倒悬在空中，然后向下俯冲，"享受"到肠胃不断翻搅的紧张刺激感. 或者至少要让他们在列车上像自由落体般掉落、然后又向上发射出去，觉得一身骨头好像要拆散、牙齿也吱吱作响，接着又觉得盲肠给拉长到与脚趾同高. 打电话来的女经理很担心，她想知道负责设计建造的工程师，这次会不会又把事情搞砸了？毕竟他们已有失败的前例，滑水道漏水，供人观赏的老虎总是不假外出，而不久前增设的方形摩天轮——看来游客还是比较喜欢旧式的圆形摩天轮.

我听完她的问题之后，很专业的答复她说："没问题，根据罗尔定理，本人认为你的顾虑完全多余. 不管怎么设计，你这过山车轨道一定会有至少一个地方坡度为水平的. 你放十二万个心好了，工程师的设计再糟糕，也不可能搞砸！好啦，请赶紧把顾问费送来，我们正好缺钱."

于是乎，第二年暑假我跑去看了看新建成的游乐设施. 我赫然发现，牌子上写着罗尔过山车. 只不过，工程师居然把轨道完全设计成平直的，与当初女经理描述的刺激情况，大异其趣. 轨道上每一个点都是水平的，而不是只有一两个点呢！我心想，当初该提醒他们避免这种状况的. 不过话说回来，他们寄来的支票被拒付而退回去了，我一毛钱顾问费也没拿到！

好啦！故事讲完了. 那么罗尔定理讲的究竟是啥内容呢？其实就是，如果我从一点出发，到与出发点高度相同的另一点，那么在行程中间某处，一定会有一个局部极大值（最高点）或极小值（最低点）.

罗尔定理 (Rolle's Theorem)　**若函数** $f(x)$ **在** $[a, b]$ **区间上连续而且可微，且若** $f(a)=0$，$f(b)=0$，**则在区间** $[a, b]$ **内必须存在一点** c，**使得** $f'(c)=0$. (见图 20.2)

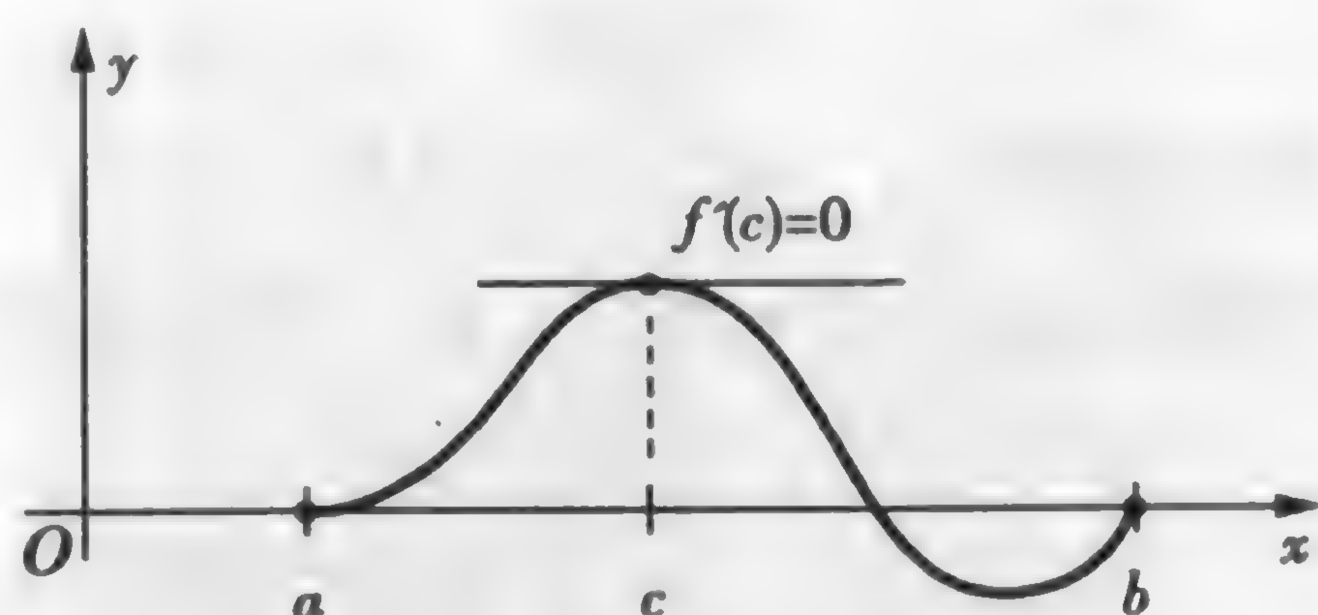


图 20.2　罗尔定理

合乎此定理的特殊状况有三：第一，$f(x)$有一个最高点，而且那一点的 $f'(x)=0$；第二，$f(x)$有一个最低点，而且在那一点 $f'(x)=0$；第三，在区间上每一点，$f'(x)=0$，而函数图像根本就是平坦的.（从微积分的观点来看，平坦曲线附近的每一个点，既可算是局部极大值，也可看作局部极小值，也就是所谓的“左右逢源”啦！）

事实上你应该注意到，罗尔定理还可以用另一种方式来陈述：

在函数 $f(x)$ 的曲线上必有一条切线，与该曲线两端点的连线平行.

现在，微积分里面最著名的定理之一，就要登场了. 只要该定理一出场，真可以让一大堆定理顿然相形失色. 不错，我们所说的不是别的，正是中值定理. 你大概做梦也不会想到，大名鼎鼎的中值定理，不过只是朴实无华的罗尔定理转个角度，歪斜一下而已. 你在看图 20.2 的罗尔定理时，若是把脑袋歪向一边，看到的就会像图 20.3 那样，也就是中值定

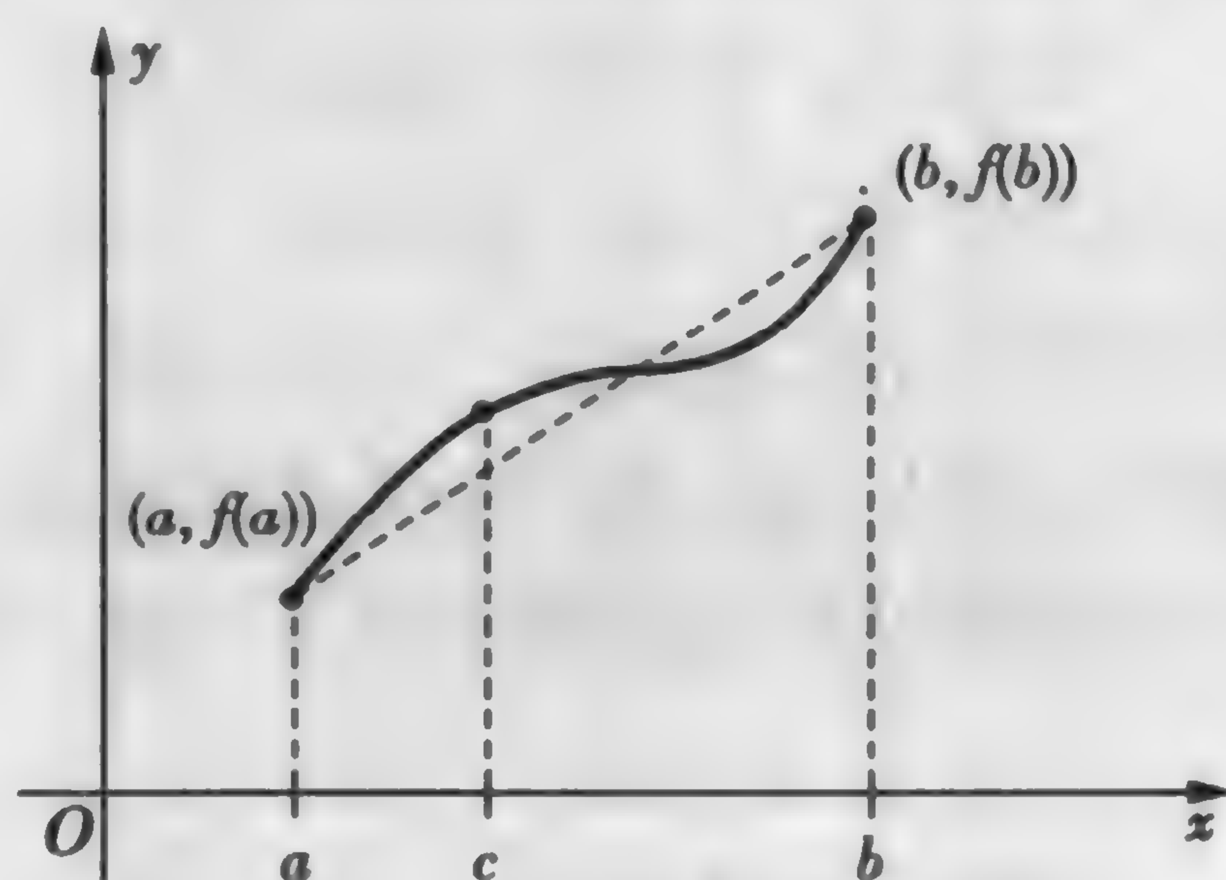


图 20.3　中值定理

理啦!

两个定理的不同之处是：在罗尔定理中我们假设 $f(a)=0=f(b)$，而对于中值定理，$f(a)$跟 $f(b)$可以为任何值. 然而，两定理的结论其实一样，都是前面所说的：在函数 $f(x)$的曲线上一定会有一条切线，与该曲线两端点的连线平行. 现在我们得好好想想，该如何用数学的语言来表达这段话的意思.

如图 20.3，图形的两个端点分别是$(a, f(a))$跟$(b, f(b))$，因而这两点之间的连线斜率就等于$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 我们希望在 $[a, b]$ 区间内存在一点 c，使得 $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 瞧! 这就是中值定理，由罗尔定理的结果衍生出来. (当然啦，正规的证明并不只是歪着脑袋看看就可以交代过去——你还得单脚跳上跳下才成.)

中值定理 (Mean Value Theorem)　若函数 $f(x)$在 $[a, b]$ 区间上连续且可微，则在该区间内必存在一点 c，使 $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

微积分里有许多决定性的结果，都要依赖中值定理来证明，这个定理的重要性，使它不愧为“最有价值的定理”(MVT). 如果你的任课老师在课堂上讲到中值定理，千万要全神贯注，即使它的关键性并非马上就显现出来. 如果老师没讲到，那敢情最好，你就当我们在这儿也没提吧.

第21章 积分：倒过来做就成了

到目前为止，我们算是讲完了微积分的第一部分，也就是围绕在微分观念的这部分．下面接着要讲的就是微积分的第二部分：积分观念．积分的英文字 integration 和 ingratiation（讨好）这个字很接近，外行人经常会把两个混为一谈，妙的是，“讨好”对于增进微积分课业成绩，也是一项颇值得学习的技巧．只不过在本章里，我们把讨论范围限制在数学技巧上．

积分就是反“微分之道”而行，把微分出来的东西破坏、还原回去，同时也当掉、毁掉了许多选修微积分的学生．但这不是必然的结果．在本章，我们将重点描述两种基本的积分法，讨论一些初步的“积分技巧”，最后不定期会加上几项“理论基础”．待我们把这章讲完之后，你准会成为数学系鸡尾酒会上，被众人巴结、崇拜得晕头转向的积分高手．如果你没参加过鸡尾酒会，不要紧，邀请函随后就会寄到，我们非常渴望结交朋友．

积分又可分为两种类型，也就是定积分跟不定积分．这两类积分的行为，就跟你去约人出来看电影时，可能碰到的两种反应一样：斩钉截铁的人，回答可能是：“想邀我出去？门儿都没有．即使世界上其他男人全死光了，我也不会接受你的邀请！”优柔寡断的人，答复就会是：“这个嘛，星期五我已经计划好去洗头，除非那天下雨．星期四有位朋友大老远要从东京飞来看我，如果那天刚巧刮台风，机场被迫关闭的话，那我可能有空．这还得看我明天是否能把要交的报告写完．如果我星期三的其他几门课都没有太难的作业的话，那天我

也许有空．”

总的说来，当机立断的人给了你一个直率、明确的答案（在这个例子里就是：“不去，我讨厌你！”），而优柔寡断的人会给你一个函数，答案可以是“可”或“否”，得靠一些变量来决定．同样的，一个函数的定积分，结果会是一个明确的数，譬如 3 或是 17，而函数的不定积分，仍然是一个函数，譬如 x^2 或 $\sin x$；后者称为“反导函数”①，它的求法则刚好跟取导数的做法相反．

让我们再多看看所谓的不定积分．

21.1　不定积分

函数的不定积分结果，就是该函数的反导函数．它是一个新的函数，而此新函数的导数即为原来的函数．求不定积分的方法就是把取导数的过程倒过来．

例题　*试求 $f(x)=2x$ 的不定积分．*

我们知道 $f(x)$ 有一个不定积分（或简称为积分）为函数 x^2，这是因为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)=2x,$$

所以函数 x^2 为 $f(x)=2x$ 的一个反导数．以符号表示，可以写成

$$\int 2x\mathrm{d}x=x^2.$$

有些人认为，积分符号 $\int$ 是由英文字母“S”变来的，代表 sorry 一字的缩写．据说牛顿当年就因为把积分这个观念强加在他的学生身上，于是向学生表示歉意，说：“Sorry about this old chaps.”另外一些人则以为，这个符号应该代表“Sum”（总和），根据他们的说法，牛顿绝不是那种会向人道歉的人．至于跟在这个积分符号后面的函数，譬如此例中的 $2x$，就称为“被积函数”．

① “反导函数”即我们通常所说的“原函数”．

好的问题 积分式子尾巴上的 dx 又是干什么的呢？

错误的答案：拼字游戏里价值 31 分的一个字.

正确的答案：用来指明式子里被积分的变数是 x. 有些需要吗？的确有. 比方你想求解：

$$\int 2=?$$

你怎么知道答案应该是 $2x$、$2t$，还是 $2y$？因为它们的导数都是 2：

$$\frac{d}{dx}(2x)=2,\frac{d}{dx}(2t)=2,\frac{d}{dy}(2y)=2.$$

但是如果你要计算：

$$\int 2dx,$$

你马上就知道该写下 $2x$，而不是 $2t$.

现在让我们再瞧瞧下面这个式子：

$$\int 2dx=2x,$$

$2x$ 并非是导数等于 2 的惟一函数，例如 $2x+3$ 的导数同样也等于 2，这是因为：

$$\frac{d}{dx}(2x+3)=2,$$

$2x+7.134$ 以及 $2x-5$ 的导数也是一样. 事实上，我们可以把任何一个常数加到 $2x$ 上，而丝毫不影响它的导数. 为了包括这所有可能的情况，我们干脆写成：

$$\int 2dx=2x+C,$$

式子中的 C 代表任何一个常数.

考前须知：千万别忘掉这个常数！

在求不定积分时，若你忘了在答案尾巴写上 $+C$，你一定会被扣个一两分，几乎没有例外. 这是有史以来，每一个受过微积分荼毒的学生，都亲身经历过

的标准过程.

糟糕的问题　为什么我们必须在积分答案的后面写上那个愚蠢的 $+C$ 呢?

首先，无论何时何地、有意或无意，把别人当作宝的东西加上“愚蠢”这个形容词，本身是一件极愚蠢的行为. 你绝对不会一见到你的教授，劈头就跟他说：“昨天我遇到你的儿子，他真是愚蠢.”不是吗？同样这个问题的较圆滑的问法可能是：“这个 $+C$ 是不是用来强调一件事实，那就是：一个函数的不定积分结果，有无限多个函数，而其中的每一个都对应到不同的 C?”

21.2　积分法：简单的方法

由于积分就是把微分来个反其道而行，所以我们把前面讨论过的几个微分法则反过来，就可以得到积分法则了. 首先，何不拿幂法则来牛刀小试一番呢?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1},$$

把它反过来写，就得到可称为“积分的幂法则”的式子了：

$$\boxed{\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.}$$

这个结果很合理，因为只要我们求它的导数，就会得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)=\frac{(n+1)x^n}{n+1}=x^n.$$

这就证明了 $\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ 的确就是 x^n 的反导函数.

这条积分法则非常好用，几乎对所有的 n 值都可适用. 为什么我们说“几乎”呢？那就是有一个 n 值是例外. 请注意，当 $n=-1$ 时，反幂法则会出现一个问题，那就是所得结果的分母会等于 0，这在数学圈子里，可是个不可原谅的罪过. 换句话说，积分的幂法则无法应用到积分 $\frac{1}{x}$ 上.

至于$\frac{1}{x}$这个函数的积分，正确结果是：

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$$

你问为什么会这样？很抱歉，事实就是这样，没啥道理好讲，你只能接受．关于这方面，我们将在第 24 章里多讨论一些．

例题 **试计算**$\int x^3\,\mathrm{d}x$.

在上式中，$n=3$，所以：

$$\int x^3\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+C.$$

例题 **试计算**：$\int(2x^{-\frac{1}{3}}+3x^3)\mathrm{d}x$.

请一项一项依次积分，记得别忘了加上常数．

$$\int(2x^{-\frac{1}{3}}+3x^3)\mathrm{d}x=2\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+3\frac{x^4}{4}+C=$$

$$3x^{\frac{2}{3}}+\frac{3x^4}{4}+C.$$

在最后这个例题里面，我们注意到一件非常重要的事实，一般教科书里也都会用大量篇幅，一再反复解释这件事：当你拿一个常数（比方说 2）去乘一个函数，或是把两个函数相加，然后再做微分或积分，结果其实与未乘常数或未相加之前，分别做微分与积分的结果一样（但是如果是让两个函数相乘，情况就完全不是这么回事了．）

还有什么我们可以很容易就求得积分的吗？

这方面嘛，由于我们已经知道$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)=\cos x$，所以

$$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C.$$

同样的，

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C.$$

又由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = \sec^2 x,$$

因而下面这个积分公式也成立：

$$\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C.$$

地洞与山羊的故事　对啦！我们耗费了不少口水讲这个不定积分，但是还没提到它有啥子用途．下面这个故事就讲到了，不定积分何时会派上用场．

主张动物保护的一男一女，在野地里散步，他们来到一个巨大的地洞前，小心翼翼地走到洞口，探头下望，发现洞里漆黑一片，深不见底．女士问道："你猜猜看这个洞有多深？"男的答道："这个我哪会知道呀！对了，咱们可以把地上这块石头丢下去，看看需要等多久，才听得到石子撞到洞底的声音，这样就可以计算出洞有多深啦．"女士觉得有道理，于是他们合力把那块石头举起来，朝地洞里抛了过去．

可是等啊等，一直都没有听到，最后只是隐约听到好像有微弱的溅水声．女士很失望地说："这个办法好像不怎么灵嘛！"男士则说："还很难说，我想我们需要一个更大的东西．"女士放眼四望，看到一根旧的铁轨枕木躺在附近，很高兴地说："你瞧那根枕木，应该满合用吧！"于是他俩连抬带拖，好不容易才把那枕木搬到洞边，丢进了洞里．紧接着他们开始读秒，在算到第 3 秒的时，突然看到有只山羊冲向地洞，毫不犹豫地一头栽了进去．他们虽然给吓了一大跳，但还是继续读秒，终于在第 10 秒时，他们听到了清晰的扑通声，之后不久，又有一声较轻的扑通声传了上来．

就在这当儿，从田野边的树林里钻出一位农夫，看到这对男女，老远就向他们喊道："你们有没有看到我的山羊？"女士大声回应道："有呀！刚才有只山羊跑了过来，跳进地洞里啦．"农夫听了，又喊道："啊，那你看到的那只不可能是我的，我的那只山羊，我用了一条长绳子，拴在一根枕木上．"

问题：地洞究竟有多深？

我们知道，枕木被抛离洞边的那一刻，时间为 $t=0$，而它落水时，$t=10$（声音从洞底传上来所花的时间在此略去不计）. 另外我们也知道，地球表面的重力加速度为 $a(t)=-32$ 英尺/秒^2（以英制计），而此重力加速度适用于任何物品，如动物、植物或矿物. 在此我们略去动物，而专注于植物，也就是枕木. 由于山羊的重量跟枕木比起来小了许多，所以山羊拖住枕木、让它慢下来的影响作用有限，因而我们也略去不计.

由于速度函数的导数即为加速度，那么把它反转过来说，速度也就是加速度的反导数或不定积分. 用数学符号表示，则是

$$v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t.$$

因此，

$$v(t)=\int -32\mathrm{d}t=-32t+C_1.$$

又因为枕木在洞口时（即 $t=0$）的速度为 0，故 $v(0)=0$；把它代入上式，则得到 $v(0)=-32(0)+C_1=0$，所以 $C_1=0$.

接下来让我们看看枕木的位置函数；同样的，位置函数是速度函数的不定积分：

$$s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int -32t\mathrm{d}t=-16t^2+C_2.$$

在 $t=0$ 时，枕木位于洞口，所以它的高度也等于 0，故 $s(0)=0$，同理可得：$C_2=0$. 现在，我们终于把位置跟时间的关系确定了下来，其中不再有未定的常数，所以

$$s(t)=-16t^2.$$

由于枕木是在 $t=10$ 时撞到水面的，代入上式，就能得知当时枕木的位置为 $s(10)=-16(100)=-1600$. 数字前的负号表示它是在地表以下而非以上，所以这个地洞有 1600 英尺深.

附言：可怜的那只山羊，就这么不明不白地淹死了.

21.3　代换法

现在想象你是一球队教练，正率领着你的球队参加一场决定性的淘汰赛．局势对你非常不妙，你领军的“变量”队被“积分”队打得落花流水．也不知道是什么地方出了差错，你的主将 x 虽然艰苦奋战，却打得缩手缩脚、完全施展不开，再不换人，这场球就输定啦．当教练的你虽然极其不愿意，但职责所在，你不得不阵前换将．你朝球队队员休息区的方向看去，发现他们个个都把头低着，盯着地板，避免跟你目光接触．这原是人之常情，谁都不希望在这个时候出去丢人现眼．

但是坐在离你最远的角落里的那个瘦小子 u，反倒满脸企盼．你心想：“这小子还真是有种．管他的，这场球反正是输掉了．”于是你先向球场上喊：“好啦！x，你下来休息．”然后转头指着 u 嚷：“小子，你的表现机会来了，我要你去接替 x 的位置！”接着你转向裁判：“本队要换人，由 u 替换……”

嘿，醒醒吧！梦做完了……记得吗？我们在谈微积分，在谈如何拿高分，对吗？在这一节，我们要教你学会一个求积分的最棒的技巧，此技巧是把链式法则反过来，而链式法则本身就是最棒的微分方法．你应该还记得链式法则吧？就是：

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$$

把它反过来做积分，我们会得到什么呢？

代换法

$$\int f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x=\int (f(g(x)))'\mathrm{d}x=f(g(x))+C.$$

我们在写这个式子时，习惯上是用 u，而非 g，亦即：

$$\int f'(u(x))u'(x)\mathrm{d}x=\int (f(u(x)))'\mathrm{d}x=f(u(x))+C.$$

如果换一种写法，让

$$u'(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u,$$

则整个方程式就变成：

$$\int f'(u(x))\mathrm{d}u=f(u(x))+C.$$

看起来我们在这儿走了一个捷径，把 $\mathrm{d}x$ 项消掉了，而且使该项换成 $\mathrm{d}u$. 这样做可以吗？答案是肯定的. 这套记号系统的设计，允许我们把$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$当成一个分数，这还真管用呢！

在应用上，没有人会去特地背下这个公式，大家只是记得要把积分式子里带有 x 的项，包括 $\mathrm{d}x$，全部转成带有 u 的项. 这个方法的关键也是它的困难处，在于要能够看出，被积函数的哪个部分应该等于 u. 现在我们来看看几个范例.

例题 **试计算** $\int \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x$.

让 u 等于 $\sin x$，则：

$$u(x)=\sin x.$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos x,$$

所以就得到

$$\mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x.$$

上面这一招的好处是，你可以用 $\mathrm{d}u$ 取代积分式子中那个让人头痛的 $\cos x\mathrm{d}x$，并以 u 取代 $\sin x$，这样就把问题大大简化了：

$$\int u^2\mathrm{d}u=\frac{u^3}{3}+C.$$

用 $\mathrm{d}x$ 去乘等号两边的这个小技巧，多少有些偷鸡摸狗，因为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$并非真正的分数，而只是用来表示导数的记号. 不过就像所谓的法律灰色地带，虽然不是很光明正大，却没有触犯到任何法律条文，那就放手去做吧！

但是你的问题还没完全解出来呢. 问题问的原是 x 的函数，咱们的答案却成了 u 的函数，这就好像有人问你现在几点钟，你却回答他“直升机”一样.

所以，别忘了把答案的 u 再换回 $\sin x$，成为 x 的函数：

$$\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$$

例题　试解 $\int e^{x^3} x^2 \mathrm{d}x=?$

让 $u=x^3$，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3x^2,$$

$$\mathrm{d}u=3x^2\mathrm{d}x.$$

为了不要让常数从中作梗，咱们规规矩矩把等号两边都除以 3：

$$\frac{1}{3}\mathrm{d}u=x^2\mathrm{d}u.$$

于是，问题里的积分就成了：

$$\int e^{x^3} x^2 \mathrm{d}x=\int e^u \frac{1}{3}\mathrm{d}u=$$

$$\frac{1}{3}\int e^u \mathrm{d}u=\frac{e^u}{3}+C=\frac{e^{x^3}}{3}+C.$$

关于指数函数（即 e^x）的积分与微分，请参考第 25 章.

21.4　眼球技术

其实一般人最常用到的积分方法，可能是教科书上极少提到的眼球技术. 什么是眼球技术呢？道理很简单，就是用眼睛看着积分问题，心里试着猜出一个答案，然后做微分，看看得到的结果是否跟被积函数相同. 如果不同，这个猜错的答案通常会告诉我们，问题出在哪里，以及如何修正. 譬如说，我们想求 $\int(2x+1)^4\mathrm{d}x$，当然我们可以用前面讨论过的代换法，一步步找出答案. 但是，现在假装我们一时间懒得费工夫，那么我们可以凭经验，随便猜一个不会太离谱的答案，比方说 $\frac{(2x+1)^5}{5}+C$. 猜得对不对呢？那么，微分一下便知分晓，这儿得用上链式法则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{(2x+1)^5}{10}+C\right]=\frac{5(2x+1)^4(2)}{5}=2(2x+1)^4.$$

结果，猜到答案的导数，比问题里的被积函数刚好大了一倍，多了一个2．所以我们要做点修改，譬如改成：

$$\frac{(2x+1)^5}{10}+C,$$

于是导数里就不会多一个2，因此这就是我们所要的正确答案了．看起来非常容易吧？但是有一点得特别注意，这个方法只能在你有八九成把握时才用得着，若觉得不太好猜，或是脑袋一片混乱，还是乖乖的使用代换法吧．也就是说，你最好是在自己觉得信心十足，才使用眼球技术．

21.5 积分表

在任何一本自尊、自重的微积分书里，都会有不定积分表，你通常可以在书的附录、或是封底的里页上看到．若在你的微积分教科书里怎么都找不到这样的积分表，请马上写信给出版商，骂他一顿，虽然此举不保证会让你得到积分表，但是你会觉得舒服一点．这类积分表的好处是，当你面对一个积分问题而不知道该怎么办，或是百思不得其解的时候，你可以查一下积分表，找出你要的答案，然后抄下来．够简单了吧．但是有三个先决条件不可不知：

1. 如果你在做作业，老师指定你要用某种积分法（如代换法），而你却从积分表上找答案，抄下来缴卷了事，那么你很可能一分都拿不到．

2. 对任课老师来说，要制造出一些积分表上找不到的积分题目，简直是易如反掌．所以，你想找的答案可能根本就不在里面．

3. 即使你要找的积分就在表上，也有可能不会一模一样；你也许得花些功夫改成同样的形式．

例题 试求：$\int \frac{1}{x^2-x-2}\mathrm{d}x.$

当你把积分表从头到尾找遍了，会发现没一个长得同它相像！真糟糕，不过你突然灵机一动，把被积函数改写一下：

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x-2)(x+1)}.$$

然后再一看，它不在表上吗？虽然式子里的是 a 跟 b：

$$\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}\mathrm{d}x=\frac{1}{a-b}(\ln|x-a|-\ln|x-b|).$$

所以，令 $a=2$，$b=-1$，就得到：

$$\int\frac{1}{x^2-x-2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x-2)(x+1)}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{2-(-1)}(\ln|x-2|-\ln|x-(-1)|)=$$

$$\frac{1}{3}(\ln|x-2|-\ln|x+1|).$$

至于答案里面的“ln”函数究竟是啥？我们在下一章再解释.

21.6　利用电脑和计算机

一点也不错，目前你只需花美金 50 元，就可以买到一个工程型计算机，能够解答你在微积分课程里可能遇到的任何积分问题．一些如 Maple、Mathcad、Mathematica 及 DERIVE 等程序更了不起，能够顺利解答许多叫一般人望而生畏的难题．既然有这么好的计算机及电脑软件，为什么还要学其他的积分方法？

这个问题有许多可能的答案，不过最基本的理由是，如果你在运用这些工具时，缺乏对积分过程的基本了解，就很容易误用而不自知．积分若计算错误，则事关重大，很可能造成桥梁坍塌，让财务分配缺乏效率，导致不小心怀孕、票房低落、过度尖酸刻薄，以及许许多多我们不便在此暴露出来的其他问题.

第22章 定积分

22.1 如何求定积分

所谓定积分，是由一个函数外加上两个数值，最后产生一个（确定的）数值. 定积分的长相与不定积分几乎完全相同，只不过在积分符号的上下两处，各多了一个写得小小的数值，这两个数值叫做积分限（limits of integration). 所以在做微积分时，若是有人问你："你的上下限是什么?"正确的答案可以是："-1 和 2." 而不是："我想想……我拒绝只穿着内裤爬一堆果冻，那种事情杀了我也办不到."

下面是定积分的标准写法：

$$\int_0^4 x\mathrm{d}x.$$

这个定积分要如何计算？很容易！首先我们得找出被积分函数 x 的不定积分（也就是反导数)，譬如在这个问题里，不定积分就是$\frac{x^2}{2}+C$. 接着把 C 擦掉（这一步让你觉得这个 C 似乎有些多余，是吧)，然后把上限"4"代入$\frac{x^2}{2}$

之后得到 8，而把下限“0”代入$\frac{x^2}{2}$，得到 0，最后再以前者减去后者，得到的差就是答案啦.

我们把以上所说的合起来写成一行式子，就成了：

$$\int_0^4 x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^4=\frac{4^2}{2}-\frac{0^2}{2}=8.$$

答案等于 8. 够简单了吧？

刚才为什么要把$+C$擦掉？这是因为当我们把上限所得的函数值与下限所得的函数值相减时，C总会抵消掉，既然如此，何必留着呢？如果你不吃这东西，就别把它放在碗里.

我们再做一个积分，这次稍微难一些：

$$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=-\cos x\bigg|_0^\pi=-\cos\pi-(-\cos 0)=-(-1)-(-1)=2.$$

也不怎么样难嘛，是不？当然，我们还没有提到定积分最最重要的性质，那就是：它有啥了不起？跟我们有啥关系？它的目的何在？比较客气点的问法则是：我们为什么要去算定积分？定积分又能够告诉我们哪些事情？

用两个字来回答：面积.

22.2　面积

不错，定积分的一项重要功用就是帮你计算出面积. 啥面积？这么说吧，如果你有个定积分如下：

$$\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x,$$

那么它的值就等于在$x=a$到$x=b$之间，曲线$y=f(x)$下面（跟x轴以上所夹）的面积(见图 22.1).

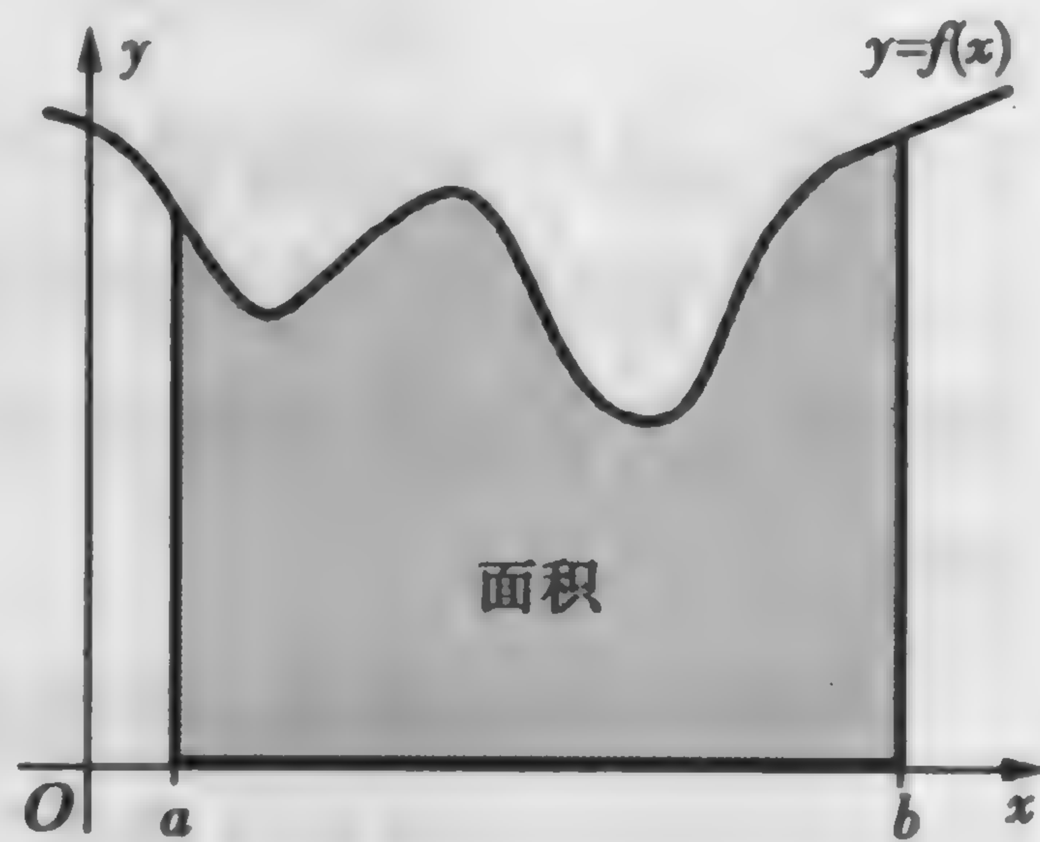


图 22.1　定积分值代表曲线下方从$x=a$到$x=b$之间的面积

举例来说：

$$\int_0^4 x\mathrm{d}x$$

就给出在 $x=0$ 到 $x=4$ 之间，位于曲线 $y=x$ 下面的面积．如果我们看图 22.2，其中那块画了斜线的部分就是了，它是一个底为 4、高也为 4 的直角三角形，而面积一定等于 8，刚好跟前面计算出来的定积分值相同，嗯，很不错！

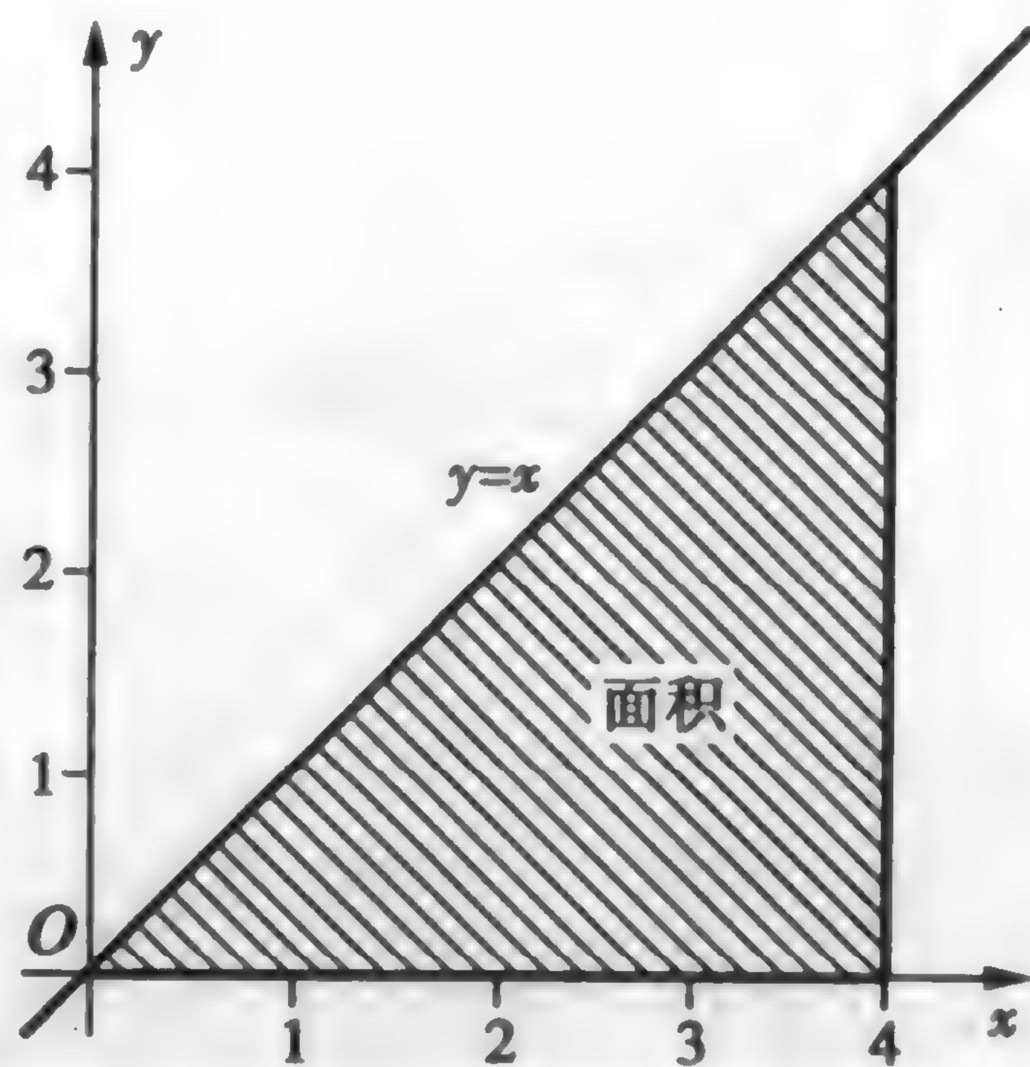


图 22.2　一个直角三角形下方的面积

当然，为求一个三角形的面积而动用定积分，好像是杀鸡用牛刀，未免有点小题大做，而且实在无此需要．我们再来看个不一样的例子：

$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x=2$$

从这个结果，我们知道正弦曲线下面，介于 $x=0$ 到 $x=\pi$ 之间的面积恰好等于 2，要不是用到了积分，还真不容易从图上计算出来呢（见图 22.3）！

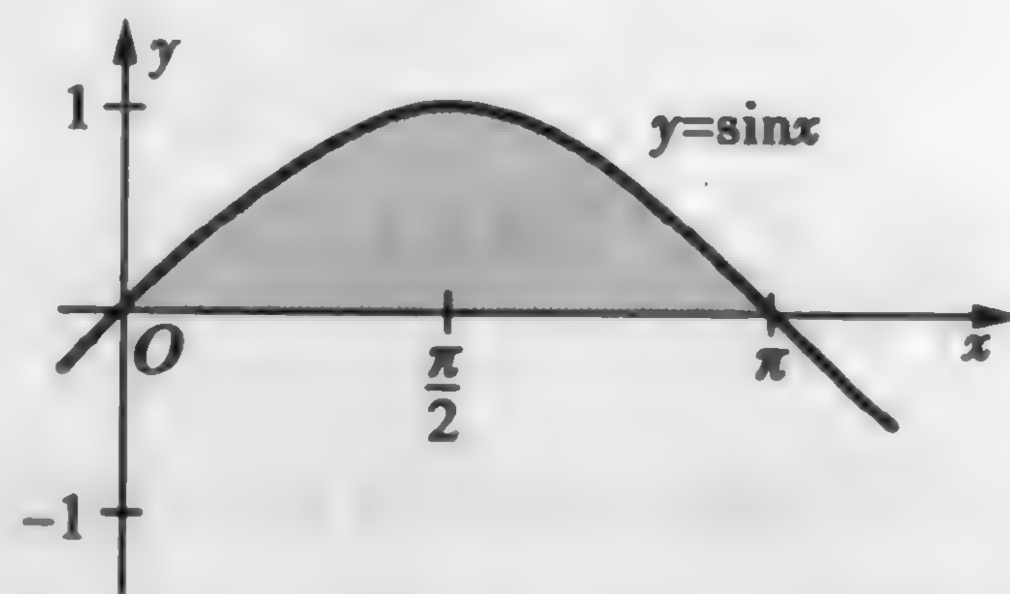


图 22.3　正弦曲线下方介于 0 到 π 之间的面积为 2

这可是显现出，定积分这玩意的确有过人的本事．好啦，我们现在来点刺激的吧！前面所说的定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

并不是永远代表函数曲线下方从 $x=a$ 到 $x=b$ 之间的面积．我们多多少少蒙骗了你，不过就如大部分的善意的谎言，其中另有实情．

实际的情形就是：如果函数 $f(x)$ 的曲线在 $x=a$ 到 $x=b$ 在区间内，都一直蜿蜒在 x 轴上方的话，那么定积分的确就是曲线下方的面积．但是，如果其间函数曲线跨越了 x 轴，延伸到它的下方时，则定积分所给的，就变成图形的 x 轴上方围成的面积，

减去在 x 轴下方围成的面积（图 22.4）. 所以，不管是直接计算积分，或是由“x 轴上下两方的面积完全相等”这个事实，都能得出下列这个积分结果：

$$\int_0^{2\pi} \sin x \mathrm{d}x = 0.$$

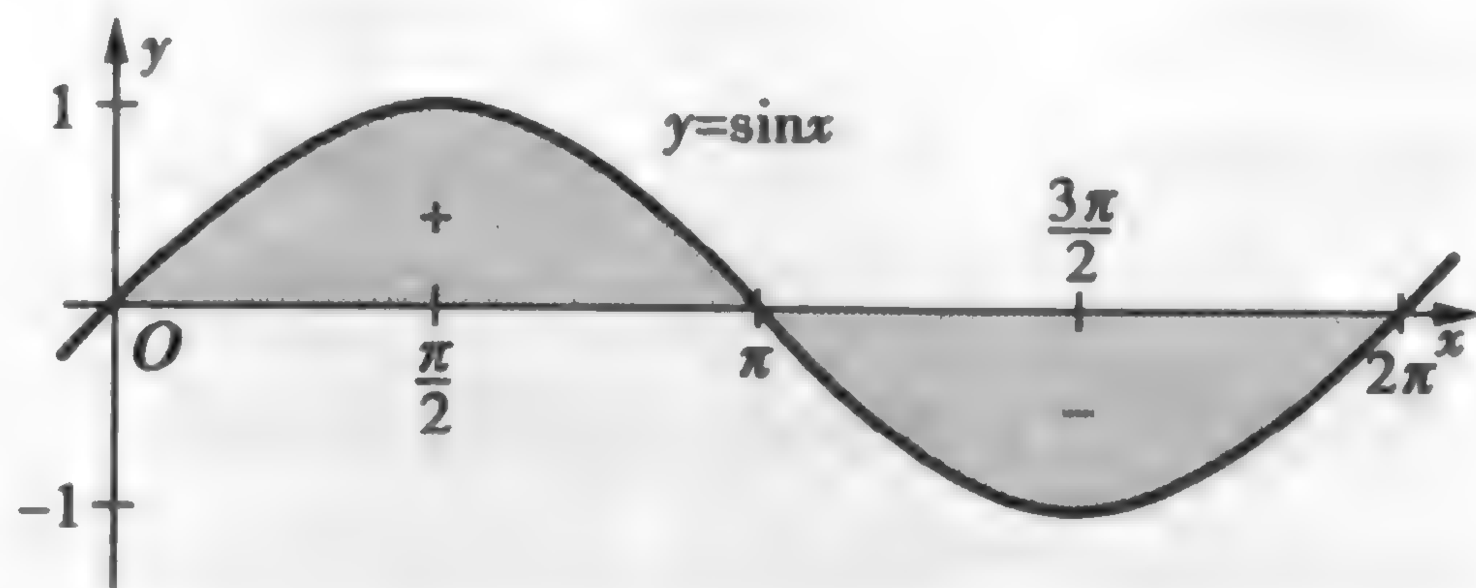


图 22.4 如果函数曲线延伸到 x 轴的下方，该部分的定积分值就可能为负数. 如图，$\sin x$ 从 0 到 2π 的积分等于 0

国王与山羊的寓言故事

很久以前有位国王，住在一座通风良好的城堡中，与他同住的还有三位既美丽又聪明的公主，以及公主们所养的山羊玩伴. 三位公主渐渐长大，到了该结婚的年龄，但是对她们感兴趣的年轻人，没有一个是有出息的，不是飙车族，就是身无一技之长的流浪汉. 于是国王设计了一个试题，来考察她们的追求者，主要目的就是要难倒那些飙车族. 他向全国臣民宣布，任何人只要能够告诉他全国农民的正确人数，就可以得到 1000 块金币的奖赏，并得以任娶一位公主为妻；若是答错了，就得砍掉脑袋.

国王知道他这个问题不简单，因为虽说该国的法律硬性规定，农民的人口密度必须刚好等于每平方英里$\frac{15}{8}$人，但是该王国的领土面积很不好计算. 怎么说呢？它是一个不规则四边形，其中三边是直线，长度分别为 100 英里、110 英里和 10 英里，但是第四条边界是沿着一条弯曲的河流，使得面积计算看来几乎不可能.

由于受到高额奖金与公主美色的诱惑，国内许多年轻人都舍命前来一试，不过不幸全都猜错了，当然也都丢掉了脑袋. 悬赏不到一年，全国飙车族已经

绝迹，国王非常满意，但是公主们却非常失望，他们埋怨道："老爸！拜托你别再搞这个鬼名堂了吧．这么做实在是无聊透顶！我们的人民连微分都不会，何况积分呢？看这样子我们这辈子是永远嫁不出去啦！"

终于有一天，来了一位猥猥琐琐、其貌不扬的外国年轻人，他向国王说道："我特地前来领取奖金，顺便娶走你的一位女儿．"国王听他说得这么有把握，哑然失笑道："你确定你办得到吗？且先告诉我，在我的王国里一共有多少农民？"

"8124.5"．年轻人毫不迟疑的答道．顿时国王张口结舌，下巴往下掉了一英尺长．这是哪门子的魔术呀！居然被他猜个正着，不但整数完全无误，连多出来的"半个"农民也没漏掉（原来该王国中，有位农民每个月会有两星期变作狼人，所以只能算半个）．

国王所不知道的是，这位看似腼腆的青年是周游各地的微积分教授，他骑着自行车来到此王国，路上听到了国王的这项奖赏，即刻知道这是他有生以来能找到对象的最佳机会．于是他骑着自行车绕了国境一周，在沿着界河前进时，他发现河道正好是 $y=\frac{x^2}{100}+10$ 这条曲线，而其他三边疆界皆为直线并相互垂直；也就是这王国的疆域应该与图 22.5 所显示的相同．

经过如此这般的仔细分析以后，他知道了王国的面积可由下面这个定积分：

$$\int_0^{100}\left(\frac{x^2}{100}+10\right)\mathrm{d}x$$

计算出来．

这个式子积分之后，变成了 $\frac{x^3}{300}+10x\Big|_0^{100}=4333.333\cdots$，又由于问题问的是农民数目，所以还得把领土面积乘以农民人口密度 $\frac{15}{8}$，于是他就求出了农民人数：$(4333.333\cdots)\left(\frac{15}{8}\right)=8125$．（不过，他知道其中一位是狼人，所以回答时扣掉了 0.5）．

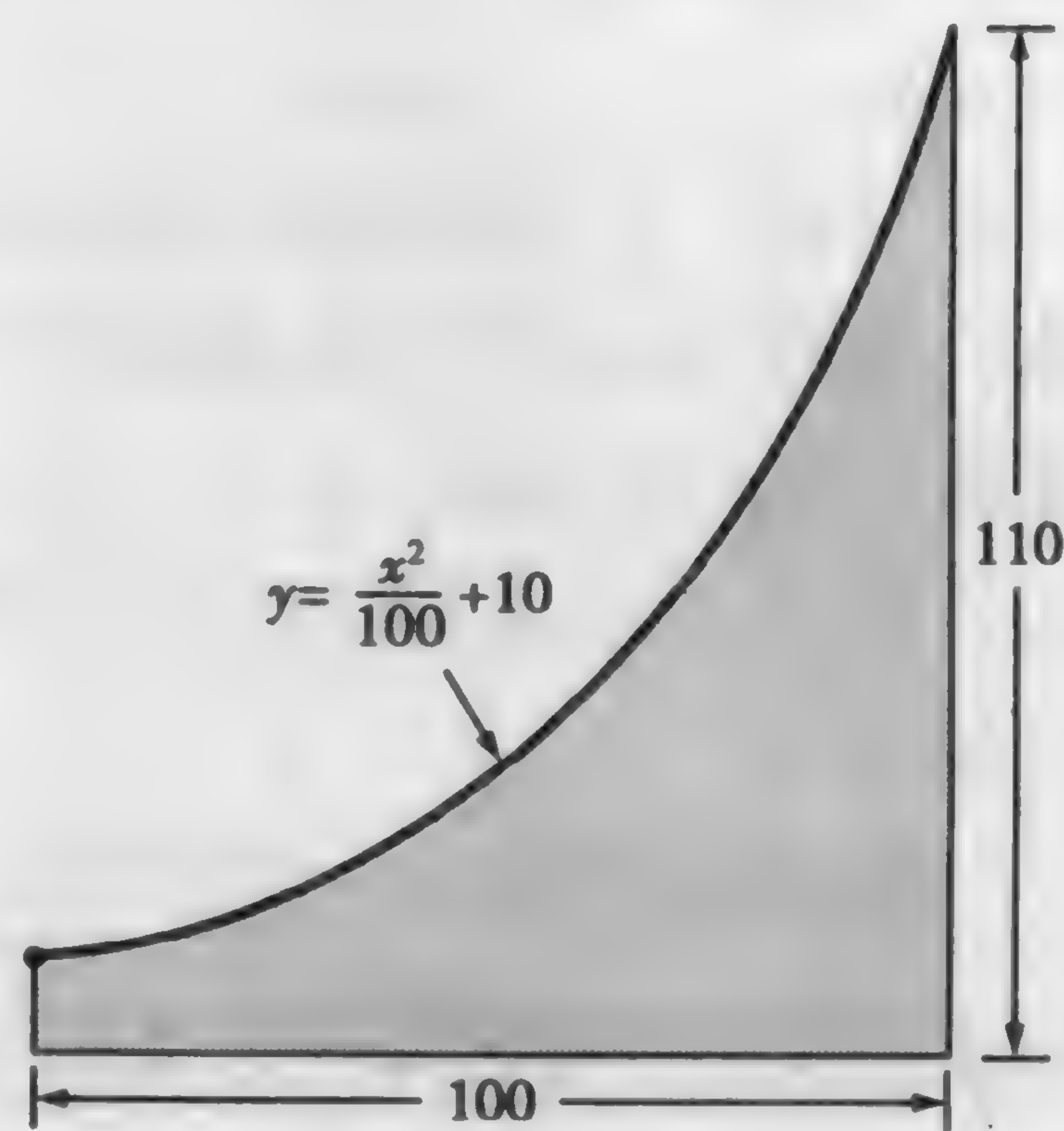


图 22.5　王国的地图

这位国王倒是言而有信，马上下令找来内务大臣，即刻张罗、准备举行婚礼，同时命令面前的年轻人说："你到皇宫后苑去，自己选出你的新娘！"这位看似胆小的年轻人很快的去而复返，牵着新娘、一脸胜利者的骄傲笑容．婚礼很快就结束了，年轻人扛起金币，挽着新娘，正要离去．

"等一会儿！"国王这时突然说："如果我能猜中你的职业，你是否肯把那袋金币还给我？"年轻人清楚记得他从未自我介绍过，所以国王不可能知道他是干什么职业的，既然有恃无恐，年轻人遂大方地说："好呀！你就猜猜看吧．"于是国王笑着说："我猜你是微积分教授．"顿时年轻人地下巴掉下来两英尺．"你是怎么猜中的？"国王说："老实告诉你吧，你所选的新娘子并不是我的女儿，而是我的山羊！"

顺便提一下，这个故事后来其实有一个顺天应人的欢喜结局．当微积分教授的遭遇传播开来，贩夫走卒都认为国王仗势欺人，于是不约而同揭竿而起，占领城堡，废除国王，同时也把公主们从城堡的封闭生活中解放出来．三姐妹很感谢这位微积分教授，让她们脱离父亲的暴政，因而都对他萌生至死不渝的爱意，不过他钟情于那只山羊，所以断然拒绝了她们．失望之余，三姐妹一起转行专攻数学，以她们的聪明头脑，不久后都成了快乐、成功的高薪数学教授．（嘿！你笑什么？这是我们编的童话故事，既然我们说她们高薪，那就是高薪．）故事至此正式结束．

附言：那只山羊没得选择（上一次不明不白葬身地洞）．

讨论到现在，我们求的都是一条曲线下的面积．更正确的说法是该条曲线与 x 轴所夹的面积．光是求一条曲线下的面积，这多无趣呀？若是改为求两条曲线中间的面积，那可就不一样啦！两条曲线中间的面积又该如何求呢？

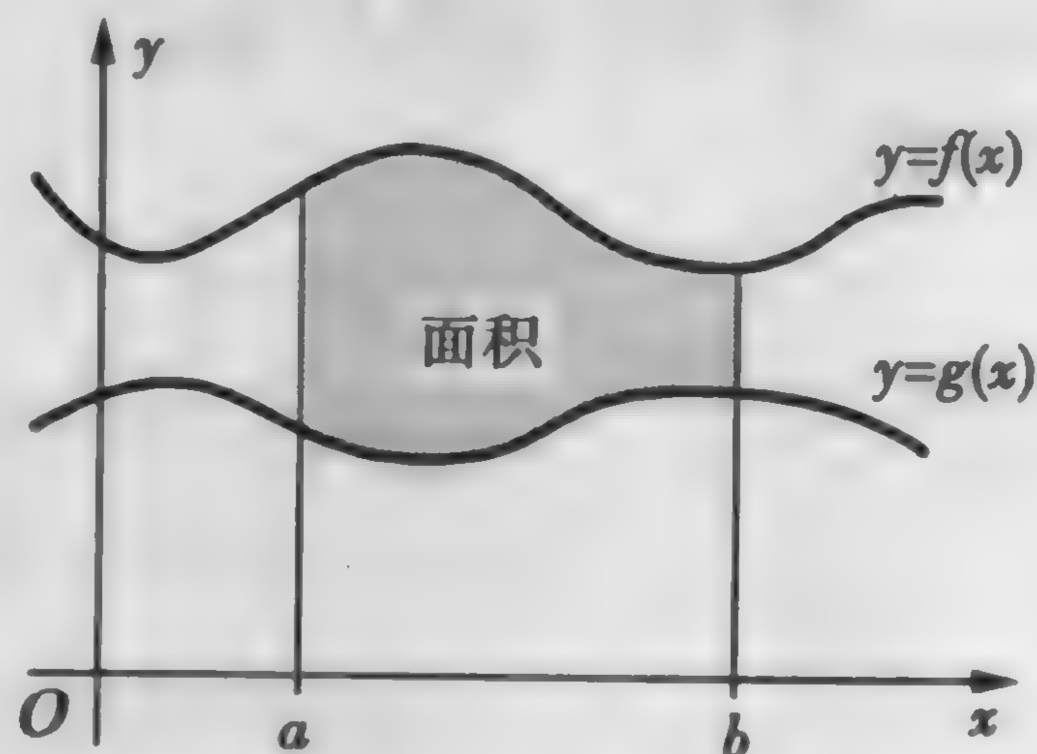


图 22.6　在 $[a, b]$ 区间上方，夹在 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 之间的面积

假设我们有两条曲线，一条是 $f(x)$ 的函数图像，另一条则是 $g(x)$ 的图像（见图 22.6）．为了方便计算起见，我们再假设 $f(x)$ 的曲线

一直保持在 $g(x)$ 曲线的上方，即对所有 x，$f(x)>g(x)$. 于是，介于 $x=a$ 与 $x=b$ 之间，$f(x)$ 图像以下所围的面积等于 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，而 $g(x)$ 下方所围的面积等于 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 中间所夹的面积，就应该等于前者减去后者，也即：

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x.$$

把以上叙述稍作整理之后，就成了：若对 $[a, b]$ 区间上的所有 x(对所有 $x\in [a, b]$，$f(x)\geqslant g(x)$，则在区间 $[a, b]$ 上，由函数 $y=f(x)$ 以及 $y=g(x)$ 所夹的面积就等于：

$$\boxed{A=\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x.}$$

例题 试求 $y=x^2$ 及 $y=x^3$ 之间的面积.

这是非常常见的例题，几乎每本微积分教科书都有它的踪迹，如不是用它作为例题，也多半会放在习题里.

从图 22.7 你可以看出，这个问题所要求的，就是图中状如新月的一小块面积，因为这是两条曲线所夹、且面积为有限值的惟一部分. 为求这块新月形的面积，我们首先得找出两函数曲线的交点；令 $x^2=x^3$，就得到：

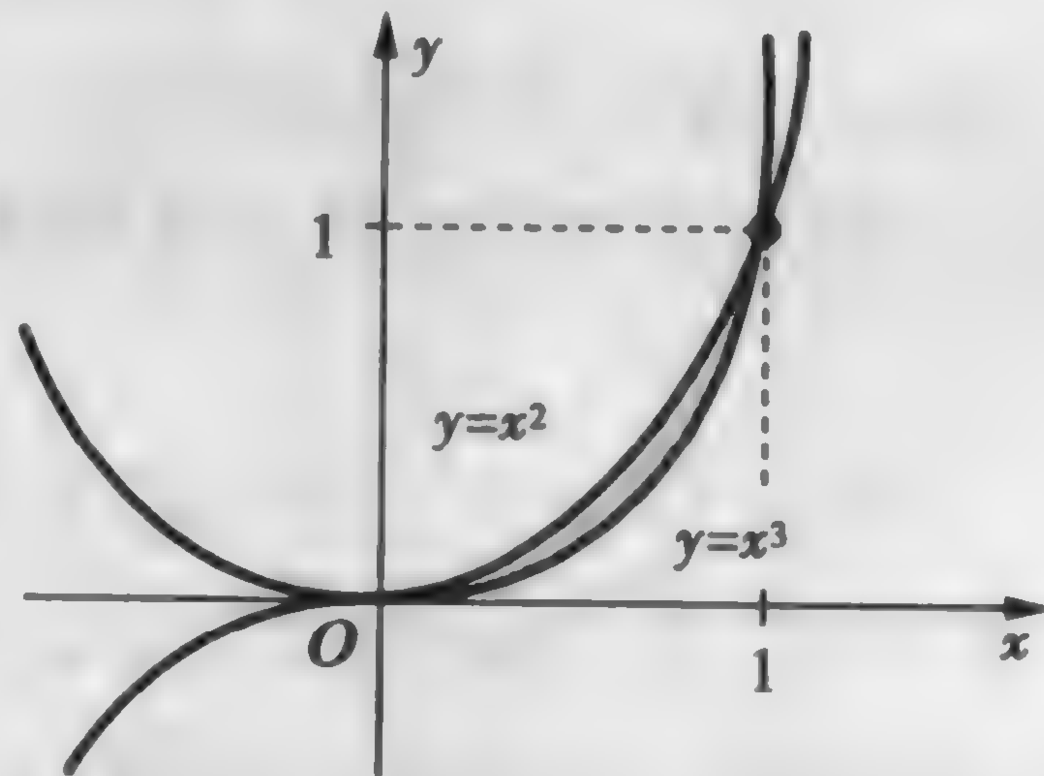


图 22.7 $y=x^2$ 及 $y=x^3$ 之间的面积

$$x^2=x^3,$$
$$x^2-x^3=0,$$
$$x^2(1-x)=0,$$
$$x=0 \text{ 或 } x=1.$$

我们需要知道的第二件事实是，当 x 在 0 与 1 之间，x^2 一直“大”于 x^3，即在上方的曲线为 $y=x^2$，在下方的曲线为 $y=x^3$.

将这些资料代入面积公式，我们得到：

$$面积=\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

22.3 微积分基本定理

我们到现在还未讨论，为什么定积分以及它所代表的量，诸如面积，可以用这样的方式求取. 答案就因为所谓的“微积分基本定理”这颗无价的数学皇冠宝石. 这个定理告诉我们，这样的计算方式是对的.

微积分基本定理

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

式子中的 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 的不定积分（或反导函数）.

在这个方程式中，我们把等号左边的符号，大致定义为一条曲线下方的面积（若该曲线为正），或定义得更精确些，就是称之为“黎曼和”的东西，这部分待会儿我们还会再讨论. 所以说，微积分基本定理就是要告诉我们，确实有这么一个计算面积与“黎曼和”的简便办法. 你只要这么想就没错了.

既然我们已经弄清楚该怎么做定积分，为啥还要这么婆婆妈妈说一大堆呢？主要的理由是，的确有一些微积分教授（姑且不问他们是谁），相信“试叙述微积分基本定理”是个很好的考题. 碰到这种考题，光把上面这个方程式写出来只怕还嫌不足，你大概还得加上一些有关 $f(x)$连续性的条件，或是该函数是否能积分的讨论. 请查一查你的课堂笔记，里面会有些线索.

微积分基本定理的重点，在于把你想知道的某些信息（即方程式的左边），转换成你有可能计算得到的东西（即等号的右边）. 请注意，我们并没说你算出来的可能性有多大. 如果你无法找出 $f(x)$的反导函数，麻烦就大了；这也意味着，在现实世界里，这情况屡见不鲜，不是每个函数都有漂亮的反导函数. 不过，在第一学年的微积分世界里，积分问题里的所有函数几乎是用来训练学生，熟悉求积分的能力与技巧，所以绝大多数的函数都有（比较起来）容

易求取的反导函数. 这种安排的出发点，是让你能积累一套积分技巧，以应付大部分的情况，尽管不是全部.

在此我们还要提出另一个定理，这定理常有人称为“微积分基本定理 2”，也有人称它为“微积分基本定理 1”，而把刚才讨论过的称为“微积分基本定理 2”. 这个基本定理明确表示了积分跟导数之间的著名关系，也就是互逆的关系，只是在这儿特别限定在导数跟定积分之间. 以数学符号表示就是:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x).$$

若以文字来叙述，就是说：如果我们一开始有个 $f(t)$，先把它积分，并且让下限 a 为常数，让上限 x 为变数，那么得到的结果会是一个 x 的函数. 然后，我们把这个 x 的函数对 x 微分，看哪！这微分步骤恰好抵消了先前的积分步骤，使得剩下的答案就是原函数 f，所不同的是，它原是 t 的函数，现在却成了 x 的函数.

这儿有个值得注意的现象，那就是无论下限 a 为何数，最后得到的结果均不受影响，你可以在 a 的位置放入 4，或是放入 π 甚至一只脏袜子，结果都一样. 所以，这个定理除了可明白表达，积分与微分互为逆运算之外，它还可以用来证明微积分基本定理，而这也就是为什么我们要啰唆这么多的缘故.

22.4 定积分的一些基本法则

好啦，以下就是咱们跟定积分打交道时，必须遵守的一些游戏规则. 在许多情况下，这些规则随时都用得上，它们就像你腰际间挂着的工具腰带.

1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

上下限互换，正负号也跟着换.

2. $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x=c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

你可以把积分式子里面的常数拉出到式子外面，就有如你可以把常数从导数里拉到外面一样.

3. $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$

如果你把积分想成是相当于曲线下的面积，这项规则就不证自明了，因为在 $f(x)$ 下方、从点 a 到点 c 之间的面积，应该等于从 a 到 b 的面积加上从 b 到 c 的面积.

例题　试计算 $\int_{-2}^{1} |x| \mathrm{d}x$.

你还记得绝对值的定义吧？它就是

$$|x| = \begin{cases} x, & 若\ x \geqslant 0, \\ -x, & 若\ x < 0. \end{cases}$$

所以我们可以把问题分开，重新写成：

$$\begin{aligned} \int_{2}^{1} |x| \mathrm{d}x = & \int_{-2}^{0} |x| \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} |x| \mathrm{d}x = \\ & \int_{-2}^{0} -x\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\mathrm{d}x = \\ & -\frac{x^2}{2}\bigg|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\bigg|_{0}^{1} = \\ & (0-(-\frac{4}{2}))+\frac{1}{2}-0) = \\ & \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

22.5　数值逼近法

数值方法（numerical method）可以求得几乎任何一个定积分的值，至少可求出很接近的近似值，但不像把积分极限代入反导函数那样，能给你完全正确的答案. 数值方法是什么呢？若用比喻的说法，就如同我们面前有个碗，里面盛装着可口的冰淇淋，而我们想知道冰淇淋有多少，最可靠的方法就是一边吃，一边算算看总共吃了多少匙才吃完！这个方法虽然不比理论方法来得高雅，但是依然美味、可口，而且对我们的最终目标来说也够正确的了.

对许多无法求得反导函数的函数，要积分的话，就只有用数值积分法了.

让我们看一个简单的例子：

$$\int_0^1 \sin x^2 \, dx$$

别因为这个例子看似简单，就以为一定找得到它的反导函数. 告诉你吧，别人早就已经试过，你就别浪费时间啦！我们前面提过的代换法、眼球法全不奏效，惟一剩下的解法就是逼近法了.

主要的几个数值逼近法，是利用矩形（矩形法或中点法）、梯形（梯形法）或是一段一段的抛物线（辛普森法——这跟卡通“辛普森家庭”扯不上关系），来逼近曲线下方所围的面积. 原则上，这些矩形或梯形的数目愈多，算出来的值就愈接近实际值. 电脑对于这类方法，执行起来比人要得心应手，因为电脑宁愿把时间花在运算上，而不是看电视. 许多计算机与电脑内都已装设了这类计算方法，而这也就是当你叫电脑替你解定积分时，它们所使用的方法.

接下来我们要讲所有逼近法的标准步骤和原理. 假设你现在想逼近下列积分：

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

首先，你得把区间 $[a, b]$ 分割成 n 个等分，称为子区间，每个等分或子区间的长度均等于$\frac{b-a}{n}$. 再把每一子区间的端点依序标上符号 x_0 到 x_3 4 个符号；因而 x_0 取代了 a，x_n 取代了 b，也就是 $a=x_0$ 及 $b=x_n$.

我们所提到过的三种数值方法，各自使用了不一样的图形，去一一取代 $f(x)$ 在子区间上的各段曲线，这些用以取代的曲线都跟 $f(x)$ 靠得很近，而且曲线下所围成的面积，都比原先的 $f(x)$ 曲线所围成的更容易计算.

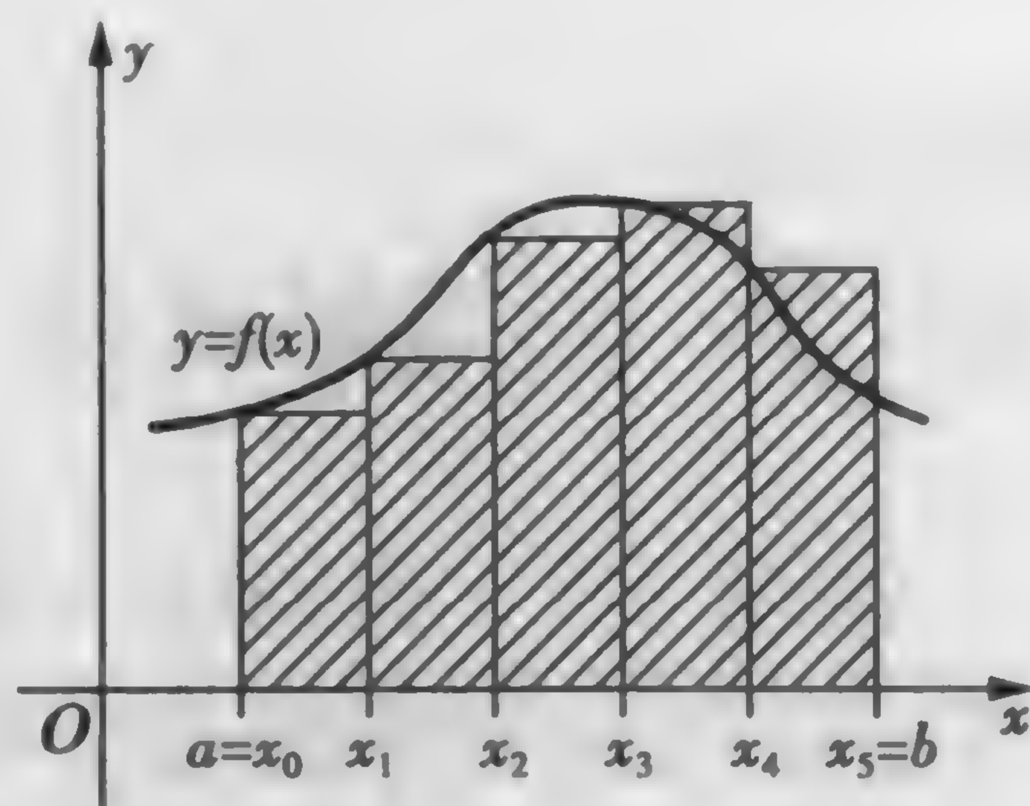


图 22.8 利用矩形来逼近定积分

这三种数值方法的差别，就在你用来取代的曲线为何. 如果你用的是一小段一小段的水平线，你会得到一组矩形，总面积就跟我们有兴趣知道的 $f(x)$ 曲线下所围面积差不多（请看图 22.8）.

总而言之，这些矩形面积之和，近似于从 $x=a$ 到 $x=b$ 之间、曲线 $y=f(x)$下方所围的面积. 由于每一个矩形都有相同的宽$\frac{b-a}{n}$,而高 $f(x_i)$等于函数在左手边端点的高度，所以面积等于$\frac{b-a}{n}f(x_i)$.

把这些矩形面积全加起来，就是所谓的矩形法.

矩形法（选用每个子区间的左边端点）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}[f(x_0)+f(x_1)+\cdots+(x_{n-1})].$$

注意，等号右手边相加的最后一项应该停在 x_{n-1}，而非 x_n.

如果我们改用每个子区间的右边端点作为矩形高度，得到的矩形法就稍微有点差别了：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+(x_n)].$$

以上这两个矩形法又称做黎曼和（Riemann sum），用以纪念发明这个方法的德国数学家黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826～1866）. 老天，他的姓名还真是又臭又长，即使他的 Georg 比英文里的 George 少了一个字母“e”!

如果我们不选每段子区间的左端点或右端点，而改选中点来决定矩形的高度，那么所得的积分逼近法就叫做中点法（见图22.9）.

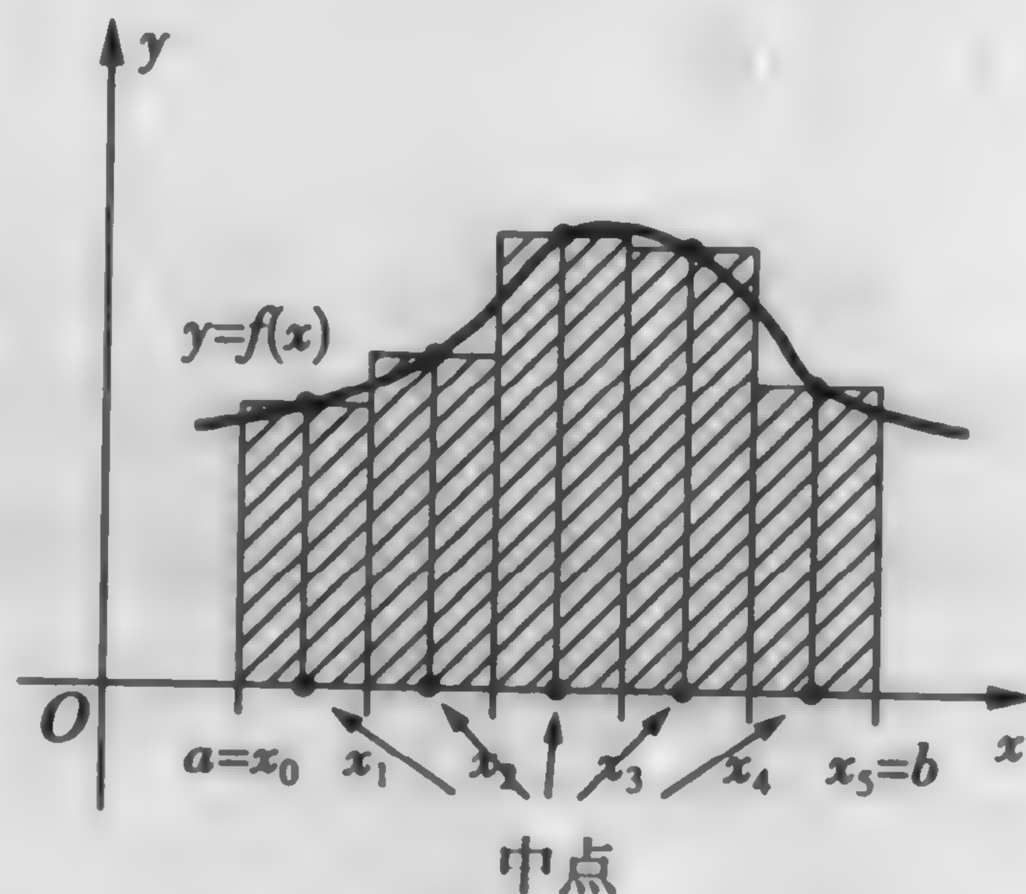


图 22.9 中点法

中点法

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right].$$

式子中$\frac{x_0+x_1}{2}$、$\frac{x_1+x_2}{2}$、…、$\frac{x_{n-1}+x_n}{2}$诸点，就是从 $a=x_0$ 到 $b=x_n$ 这个区

间 n 等分后，各个子区间的中点.

用矩形面积的和来逼近一段曲线下方所围面积，这个基本想法是整个数学科学中最重要的概念之一，其重要性大约跟用一系列割线来逼近切线的想法并驾齐驱．我们待会儿还会回头来讨论，至于现在嘛……

如果我们把 $f(x)$的每一小段曲线，换成斜率各不相同的直线，这些斜线显然比矩形的平顶更近似原来的曲线．这么一来，我们就得到梯形法啦（见图22.10）.

梯形法

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1}+\frac{f(x_n)}{2}\right].$$

这里你把头尾两个值 $f(x_0)$跟 $f(x_n)$都包括进去了，不过各只有一半而已．为什么会这样呢？与梯形面积公式有关：左端高 L、右端高 R、而宽为 W 的梯形，面积为：$\frac{(L+R)W}{2}$.

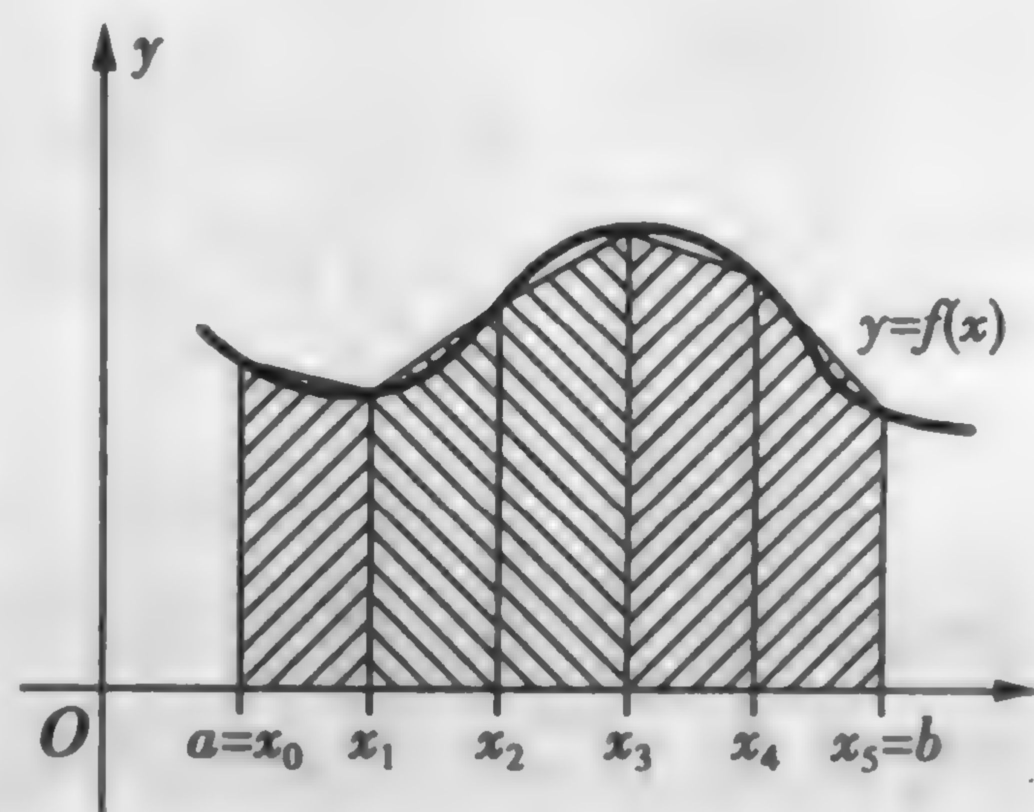


图 22.10 猜猜看，我们在梯形法里用什么取代了矩形

如果我们再进一步，用抛物线片段来取代每一段 $f(x)$，结果又会比梯形法所用的斜线更接近原曲线，这就是所谓的辛普森法.

辛普森法

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)].$$

请注意，在辛普森法中，等号右边的分数（相当于子区间的宽度）为$\frac{b-a}{3n}$，这是积分抛

物线之后的结果. 而括号内的每个$f(x_i)$的系数有一个固定的模式，那就是：

$$1, 4, 2, 4, 2, 4, \cdots, 2, 4, 2, 4, 1.$$

只要你是把区间 $[a, b]$ 分割为偶数等分，就会符合这个模式. 在提到辛普森法时，你的任课教授可能会证明，为什么那些系数会有这个模式，当然也可能不会. 如果他真是在课堂上讲过，那么除非他明确告诉你们此题绝对不考，你最好把它背下来. 但是一般的教授都认为，这个问题作考题太过繁琐了.

这些逼近法在计算上都不难，只是过程单调、乏味，理应丢给电脑或电子计算机去做，偶尔也用来折磨一下微积分学生. 不过，这类做多了准会叫人发疯的计算，是可编程的电脑或计算机最拿手的差事. 在编程序时，你可以造一个回圈，让程序每迭代一次，就自动加到总和中去，那么等到程序执行完，你要的答案便出笼啦.

现在让我们举个实例，看看用矩形法（以右端点的高度为准）求定积分 $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$ 的近似值时，程序该如何编. 假定我们把问题指定的区间分割成 10 等分，所以总和为 10 个项相加.

矩形法的程序范例：

1. $S=0$
2. $f(x)=\text{sqrt}\ (t)$
3. $a=1$
4. $b=2$
5. $n=10$
6. $d=\dfrac{b-a}{n}$
7. FOR $k=1$ TO n
8. $S=S+f(a+k*d)d*d$
9. NEXT k
10. PRINT S

第 8 行的 $f(a+k*d)d*d$ 这一项，就是一个个矩形的面积，当程序执行

FOR 那个循环时，此项会加进总面积 S 之中.

如果你偏不喜欢采用右端点高度，而要改以左端点，你可以把第 8 行里的 k，以$(k-1)$取代. 同理，如果要用中点法，可把同一个 k 以$(k-0.5)$取代，因为 $0.5d$ 就是子区间宽度的一半.

至于考试嘛，对付这些逼近法的最好方法，是在“有可能出现在考卷上”的前提下，趁考试前把公式背下来，然后在考完后尽快把它们忘掉——“心中想的念的盼的望的，不会再是你. 不愿再承受，要把你忘记!”

22.6 黎曼和——附带一些关键细节

某些教师可能会要求你务必知道定积分的技术定义. 第一次听到时，你可能觉得它很难，不过等你学得了其中的窍门之后，就不这么觉得了. 所谓技术定义，其实就是用矩形法来逼近一个积分.

还记得矩形法（选用右端点为每个矩形高度）在说些什么吗? 它是说：把区间 $[a, b]$ n 等分为 $[x_0, x_1]$、$[x_1, x_2]$、…、$[x_{n-1}, x_n]$，而其中 $x_0=a$，$x_n=b$，则

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].}$$

为了求出

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

的实际值，我们得想办法让近似值愈来愈逼近实际值. 要怎么做才能达到这个目的呢? 就是把区间 $[a, b]$ 分割得更小，也就是让矩形愈来愈多（也就是让式子中的 n 愈来愈大）. 如果取 n 趋近无穷大时的极限，我们就可以得到实际值啦.（瞧! 极限又派上用场了，没想到吧?）

双“营”记 某年冬季，某地青年活动营受到暴风雪的肆虐，房舍全坍塌了. 虽然如此，来年暑假报名参加夏令营的反而比前年多，营区工作人员为了应急，赶忙搭建起一座巨大的帐篷，让参加夏令营的男孩跟女孩都住在里面.

当然男孩跟女孩不能混住在一起，于是他们在帐篷正中间加建了一道木板墙，以便隔开男孩营和女孩营.

那座帐篷的篷顶横切面形状像个人字，中央撑得最高，两边弯曲下降，最后与外墙相接. 由于是临时应急，营区主管只找来了 6 大块长方形三夹板，拼凑起来筑成隔墙. 不幸的是，这些三夹板不能顺着帐篷的曲线密实贴紧，因而留下了大量的空隙. 让隔墙而居的少男少女大饱了眼福.

消息传开之后，第二年的报名人数激增，营区主管当然有所耳闻，所以在夏令营开始之前，也趁机把隔墙整修了一番. 这回他们用了十二块厚实木板，替换原先的三夹板，并让每块木板上方的空隙变小了一些，但是个子高的年轻人，仍然能通过窄小的空隙窥视. 结果，有家长发现了这个缺失，准备约同律师去法院按铃，控告营区有伤风化，迫使营区不得不正视这个问题.

第三年的报名人数仍然居高不下，只是多数申请人都指明要求上层铺位. 不过等他们报到之后才发现，营区主管把问题隔墙又重建了一番；这回他用的是宽仅一英寸的木条，几乎塞满了帐篷的整个横断面，即使最狡猾的年轻人，使出吃奶的力气，也拿它毫无办法，除了偶尔可看到细缝后的眼睛外，啥也瞧不见. 所以，对簿公堂的危机解除了，但不幸的是，第四年的夏令营报名人数却因而大幅减少，居然连基本人数都凑不足，该营区从此就关门大吉了.



图 22.11 建造帐篷隔墙的头两个阶段

假如当时报名人数没有变得太少、营队能继续营运的话，那么以后几年里整修营区时，隔墙上拼合的木条很可能会愈来愈窄，这正好跟利用“黎曼和”来逐渐逼近定积分的值，在做法上不谋而合 (见图 22.11). 这些愈来愈窄的木条加起来的总面积，愈来愈接近帐篷切面的实际面积；这些木条趋近无限多时的面积，就可当作定积分的严格定义.

定积分的技术定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

天啊，这式子的右半边未免太难看了吧，现在早已不兴这么写啦！$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$的写法，对业余人士仍旧说得过去，但总是这么写，恐怕往后连贩夫走卒都看得懂，岂不坏了数学家崇高的形象？所以，聪明的专家引用了两个新的记号，$\sum$ 跟 Δx，以把外行人士挡在门外，其中的 $\sum$（希腊文的大写字母 sigma）用来代表总和：

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

上面这个很玄的写法，其实就代表 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$，其中的 i 叫做求和指数（index of summation）．另外，再用 Δx 来代表逼近法里所用的那些细长矩形的宽度，即 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$.

把这两样新玩意儿代入后，我们的积分定义看起来可就伟大得多啦：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

这个式子还有各种写法．我们可以由其他逼近法入手，譬如改用子区间的中点来求 $f(x)$，或把 $[a, b]$ 区间分割成不等长的子区间等等．理论上，最后得到的数值一定相同．在这些五花八门的写法中，由矩形法演绎出来的写法是最简单、最常使用的一个．也许你很好奇，想知道最复杂的版本是啥样子，那么瞧瞧这个：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

式子里面的 c_i，是子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的任何一点.

两者有何不同呢？后面这个复杂的版本是说，我们不一定非把区间 $[a, b]$ 等分不可，而是可以把它分割成不等长的 n 段，每段宽度为 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的任何一点 c_i 均可．只要当 n 趋向无穷大，且函数 f 能保持冷静（意思是“不会太不连续”）的时候，所有的子区间大小都趋近 0，这个复杂版本就行得通.

当然，如果我们在取极限以前停了下来，我们会得到一个“黎曼和”；也就是说，$\sum_{i=1}^{114} f(x_i)\Delta x$ 是 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的一个“黎曼和”逼近.

虽然有点老王卖瓜之嫌，我们趁此再度强调一次，前面提到过的微积分基本定理，可真是可爱透顶啦！瞧瞧这个定积分的“定义”，是多么讨人厌的怪物，里面一大堆极限，和，以及 Δ 什么的．要是没有了微积分基本定理，你可得赤手空拳地去用这怪公式打交道，做多了不烦死才怪！微积分基本定理真是伟大的救星，只要被积函数有反导函数，你就可以直接取反导函数，把上下限代进去，三两下就能得到精确的积分答案了．

警告：最糟糕的函数是它根本没有反导函数，你拿它没辙！在这种情况下，只要该函数是连续的，或是只除了有限多个间断点之外其余仍为连续，我们仍然认为这个函数可以积分．

好啦！这最长的一章总算到了尾声，不但写的人很累，读的人也快打瞌睡了．咱们小休片刻如何？

通俗演讲的寓言故事

话说在一个不便透露校名的某大学里，举办了一系列的演讲，由学校的教授们主讲，对象是校外普通老百姓．这个系列显然非常受欢迎，举办了好多年．美中不足的是，自从开办以来，未曾有数学系的教授上过台，原因是主办人害怕数学家无法跟缺乏数学底子的大众做良性沟通．但是这个缺陷总不免招人非议，在舆论的压力下，主办人终于邀请了一位数学教授，安排好演讲日期，并且特别提醒他说：“请注意！来听讲的人都是最普通的老百姓，他们连微积分课都没上过，所以不知道什么是导数和积分．”

“没问题”．教授回应道：“我懂你的意思”．

到了演讲那天，主办人作过例行介绍之后，教授走到讲台上，一开口就说：“诸位女士先生，在下我今天要讲的题目，是如何求函数 $f(x)$ 在 a 到 b 这段区间上的定积分”．坐在第一排的主办人闻言大惊失色，而整个大教室里的听众个个一脸惊讶．教授望了主办人一眼，叫他放心，然后继续说：“在座如有任何人对定积分不熟悉，不要紧，你只要把定积分想成是一个‘黎曼和’的极限……”

第23章

模型：从玩具飞机到跑道

从现实生活中产生出来的数学问题（有别于那些凭空捏造出来的例题），一般都非常琐碎麻烦. 如果有人给了你一个问题，要你做出它的数学模型，你该怎么办？下面是你应遵循的三个步骤：

1. 把问题整理一番，也就是把所有跟问题无关的信息剔除.
2. 看看能否把剩下的信息改造成为一个数学问题.
3. 解该问题.

这三个步骤各有其困难与陷阱，有时必须一试再试，才能完成步骤、求得最后答案. 你会发现，经过努力和挫折后得来的果实，不但特别甜美，也非常值得. 为什么呢？因为在现实生活中，好的数学模型可以成功预测世事的发展，而且准确性惊人. 一般说来，为了顺利通过上述的第 2 步和第 3 步，你在进行第 1 步时，往往必须舍得抛掉大量看似有关的信息，而且在进行第 2 步、写下方程式之前，经常还得大刀阔斧地简化问题所给的假设，这样你才有希望在第 3 步里，获得合理的解.

在做数学模型上，你可要比发明微积分的牛顿、莱布尼茨那个时代的人幸运多了；原因是你手边有电脑和计算机，可以帮助你快速完成许多计算或运算，这些运算复杂难缠，甚至让那些才思敏捷的伟大数学家都望而却步.

模型寓言

有一位数学家约了她的两位好友去看赛马，其中一位是物理学家，还有一位是统计学家．他们相互约定，在当日压轴的那场大赛中，使出自己领域的看家本事，各投注一百美元，看谁能买中胜出．

统计学家非常郑重其事，马上到附近的书报摊，买下即将出场的每匹马过去比赛的历史资料，然后打开她的笔记本电脑，把所有可得的变量输入程序里，顷刻间就得到了每匹马跑赢的概率分布．她拿这个概率分布，去同公布的输赢次数相互比较，然后就把她的一百元全押在 3 号马“通灵异数”身上．

物理学家则把注意力放在每匹马的质量、体积、身体各部肌肉之间的比率、做功的能力（结果当然都是：1 马力），以及跑道的摩擦系数、当天的风力等等．几经比较之后，他把钱全押给了 4 号马“冷融合”．

数学家却避开人群，走到一个清静所在，向远方凝视了好一会儿，完全没有去理会跑道和参赛的马匹．最后，她把一百元全押在 5 号“费马大定理”身上．

果不其然，比赛结束时，“费马大定理”轻易的拔得了头筹．“你是怎么猜到的?”物理学家跟统计学家都大惑不解．

“这个嘛……”她解释道：“如果你们来听过我在微积分课堂上讲的模型课，就不会这么惊讶了．我的第一步是假设每匹马都是一个完美的球……”

寓意：在为问题设计模型的时候，重点不在于问题所给的诸多假设与事实相差多远，而在于它是否保有够多的关键信息，使你能够了解问题的精髓．关键信息也许多到让你赢得巨额奖金．

23.1　现实问题

例题　现在室外气温高达华氏 105 度（摄氏 40.6 度），这数字只是在阴凉地方测得的温度．时间是接近中午的 11:30，烈日当空，万里无云，此时你正站在屋顶上，手里捧着一个绿色气球，里面装满了面粉，因为你想在你的室友从屋里走出来，把这个面粉炸弹砸到他的头上．谁叫他口风不紧，让女友知道

了你的行踪，酿成难以收拾的局面，不给他一点小苦头吃，岂能消除你心头之恨？屋顶离地 30 英尺，手中的面粉炸弹已经晒得发烫，你的脑子也晒得昏昏沉沉，却一个劲儿在想，待会儿这玩意儿掉在你的室友头上时，它的速度应该是多少？造成的混乱会有多严重？

第一步，我们得把所有不相关的信息剔除掉（都是你的室友大嘴巴，否则你压根儿不会顶着大太阳，跑到屋顶上——这个我们知道，但是跟这颗面粉炸弹的威力完全风马牛不相及），接下来还得把剩下来的有关信息尽量简化，简化到我们能够用来解决问题.

哪些信息可以剔除呢？气温可不可以剔除？当然气温跟面粉炸弹发烫两者不无关系，但是与我们的问题关系不大，所以应该剔除掉. 又，在烈日高照的 11:30，你在屋顶上几乎被烤焦不说，而且从一大早到现在连一口咖啡都还没喝，这对你来说也许非常重要，但我们仍然决定把它剔除.

你手里捧着的气球，里面装的是面粉而不是水，两者之间有任何不同吗？的确有——面粉炸弹炸开时，不会泼洒得像水弹开花那么远，而且弄得一头一身的面粉，比起一身湿透、成了落汤鸡，清理起来可就大费周折啦！这对炸弹的威力来说，的确有决定性的影响，所以这个信息我们先予以保留. 那么气球炸弹的形状呢？这个比较棘手. 气球的形状对面粉炸开后的分布情形很可能有影响，但是题目里并没有这方面的蛛丝马迹，所以我们假设它是球形的.

题目还特别提到了屋檐离地高度是 30 英尺，这听起来很重要，但是你是要把气球炸弹从屋檐边缘丢下去？还是要把它高高举起之后才往下丢？若是后者，你的身高是多少？同样，你的室友有多高？这些细节我们都无法确实掌握，所以我们只能把它理想化与简单化，假设你让气球炸弹从屋檐上方 6 英尺处放手，而你室友的头顶刚好也在地面上方 6 英尺处. 换句话说，气球炸弹掉落时所走的距离为 30 英尺，多妙呀！

这个气球炸弹掉到你的室友头上时，速度究竟多快？这可是整道题目的关键所在！在此我们需要重力加速度 $g=-32$ 英尺/秒^2 这个事实的帮忙. 不过在引用这个事实时，有一点千万、千万得注意. 假如你爬上屋顶的目的，不在找你那可恶的室友出气，而是要给你最最心仪的女郎一个惊喜，打算把玫瑰花瓣撒落到她的身上，那么花瓣与装了面粉的气球，掉落的速度可就完全不同

了，因为花瓣会四处飞舞、到处乱飘，面粉气球不会．所以我们若假设气球的加速度刚好是－32 英尺/秒^2，跟事实不会相差太远．我们写成：$a(t)=-32$.

知道了加速度，求速度就不难啦！因此，面粉气球的速度（或速率）应该是加速度的反导函数，也就是 $v(t)=-32t+C$. 那么 C 又是多少呢？我们知道，当你看到你的傻瓜室友开门准备走出来之际，你捧着气球，心中沉思着生命的意义、文明的必然衰落，犹豫着自己到底该不该把气球砸到你的室友头上，在你充满矛盾的关键时刻，气球的速度为 0．所以，$v(0)=0$，故 $C=0$，因而 $v(t)=-32t$.

看起来已经满有头绪了，只要我们能够找出，到底在什么时刻气球炸弹砸到你的室友的头，我们就可以算出气球那时的速度．但是我们只知道气球得掉落 30 英尺，才碰到他的脑袋，所以我们需要的是距离函数，而距离函数是速度函数的反导函数：$d(t)=-16t^2+D$. 那么 $d(0)$是多少呢？$d(0)$应该等于 36 英尺，因为你是从屋顶上方 6 英尺处放手的．所以，$d(t)=-16t^2+36$. 气球会在何时砸到他的脑袋呢？答案是当 $d(t)=6$ 的时候，亦即$-16t^2=-30$，或当 $t^2=15/8$，也就是 $t\approx 1.37$ 秒的时候.

那么碰上脑袋的那一刻，气球的速度究竟是多少？简单，$v(1.37)=-32(1.37)=-43.8$ 英尺/秒．听起来够快了，应该可以把他搞得一团糟了．这又把我们带到了第二个问题——究竟有多糟？

首先我们得把这个问题解释得比较具体一些．记得前面我们假定气球为圆球形，试想，你要是把这么一颗气球炸弹从 3 英尺高的地方（差不多是从你的腰际）放手，让它坠落到地面上，当它撞到地上时，当然会噗的一声砸碎，里面装的面粉会溅得到处都是．但在事实上，并非“到处都是”，而是会形成一个以落点为圆心的圆，对吧？我们可以把这个圆的半径称为溅泼半径.

现在，我们不妨让“气球会造成多严重的脏乱?”这问题，等同于“当气球击中目标时，造成的溅泼半径是多少?”很不幸的，以题目所给的现有资料，我们实在无法回答后面这个问题．我们并不知道任何气球炸弹从任何高度掉下来时，所造成的溅泼半径，而在这次实验之后，大概你这辈子也难有机会重新做一回.

我们还需要额外的信息．这样吧，我们去麻烦你的另一位室友（跟你一鼻孔出气的），到实验室（厨房）快速做这个实验．他拿了一个跟你手中一模一

样的气球炸弹，从 9 英尺高处（他爬上了流理台）放手让它掉到地板上，果然是溅得一塌糊涂. 他量了一量，溅泼半径是 7 英尺. 然后，用跟前面相同的方法与步骤，我们算出了这枚试验炸弹落到地板上的速度是－24 英尺/秒.

现在，我们可以针对溅泼半径跟撞击速度之间的关系，做一个猜想. 我们假设两者成正比，也就是存在某个神秘的常数 K，使得：

$$\text{溅发半径} = K \cdot \text{速率}$$

这只是个数学模型——在真实世界里，我们可能有必要重新考虑上面这个假设，做些修正. 但在此处，这个假设还算合理.

有了你的心腹室友的实验数据，我们可以求出 K 的值：

$$7 = K(-24),$$

$$K = -\frac{7}{24}.$$

换句话说，溅泼半径就等于 $-\frac{7}{24}$ 乘上撞击速度. 我们已经知道，你手中的炸弹掉落到室友头顶时的速度为－43.8 英尺/秒，所以溅泼半径将为 $\left(-\frac{7}{24}\right)(-43.8) \approx 12$ 英尺. 在他把混乱场面清理干净之前，你大概已经逃到香港啦！



第24章 指数与对数："e"把戏总复习

24.1　指数

好啦！你看到"把戏"两字，可能以为我们要从帽子里变出鸽子或兔子，觉得了无新意．不过，温故而知新的道理大家都知道，所以将就一点，让我们很快复习一遍吧．

指数是什么？指数就是那些像鹦鹉般的、站在数字或变量右肩膀上的小数字．除了外形跟鹦鹉相似，它也有自己的一套规则．鹦鹉的言行规则是：第一，模仿主人，以此娱乐主人；第二，只跟其他鹦鹉好．指数的言行规则与上述两点相去不远，怎么说呢？请看看下面两个等式：

$$2^2\times2^3=2^5,\qquad (2^3)^5=2^{15}.$$

如果我们把 2^3 想成 2 自乘 3 次（事实上就是），并以此类推，上面这两条规则就不难记忆了．

$$2^2\times2^3=(2\times2)(2\times2\times2)=2\times2\times2\times2\times2.$$

我们还需要知道：

$$2^{-3}=\frac{1}{2\times2\times2},$$

然后，我们就得到了下列两个规则：

$$x^{a+b}=x^a\times x^b,$$

$$(x^a)^b=x^{ab}.$$

这些都很简单，没啥了不起，但是最好还是把它们记住．那么 x^a+x^b 呢？有人可能会想写下这个答案：x^c，这可就错啦！不信你随便举个例子试试，譬如 $2^2+2^1=6$，6 这个数就不是 2 的某个乘方．

指数还有些什么好处呢？瞧瞧下面这个例子：$\sqrt{x}$的另一种写法是 $x^{\frac{1}{2}}$，你知道为什么吗？动手试验一下就会明白啦：

$$x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=x^1=x=\sqrt{x}\sqrt{x},$$

所以说，$x^{\frac{1}{2}}$与$\sqrt{x}$事实上是同样的东西．

以上这些法则对所有的指数一律适用，无论它是否为整数．

还有，任何数的 0 次方都等于 1，譬如 $(345\,762)^0=1$．惟一的例外是：0 的 0 次方既不等于 1，也不等于 0——根本就没有 0^0 这样的数．

回到 2^3 的例子，我们称其中的 2 为“底数”(base)．我们可以用 10 作底数，诸如 10^3 或 $10^{\frac{1}{2}}$ 等等；底数也可以是分数或无理数，包括“e”（差不多等于 2.7182）这个奇怪的无理数．虽然这个“e”从表面上看起来没啥道理，但是后面你会发现它非常有实用价值．

好问题：为什么要用 e 来代表 2.718…？

错误的答案：因为字母 a、b、c、d 都另有他用．

正确的答案：因为 e 是 exponential（指数）一字的第一个字母．

据说有位英国数学家能把 e 的数值背到小数点后10 000位，他的练习方法是跟他的太太轮流，每人每次依序说出 100 位数字，一来一往好像在作数值交谈似的．他们为什么要如此折腾自己？我们猜想，可能是英国没有什么值得观赏的电视节目吧．

小组作业：如果你呆着没事干，电视又看腻了，那就去找两位臭味相投的同窗好友，像那位英国数学家一样，一起把 e 的值背到小数点第100 000位．如果你时间没那么多，那就背到小数点第50 000位．要是你真的很忙，干脆用

3 代替 e 就好啦！

图 24.1 是 e^x 的函数图像. 这曲线有什么重要的特性呢？

1. 由于 $e^0=1$，它会通过点 (0，1).

2. 它永远为正值；也就是说，不管 x 等于多少，$e^x>0$.

3. 它一直在递增.

4. 它递增得非常非常快. 这正是我们把快速成长称为"指数成长"的原因.

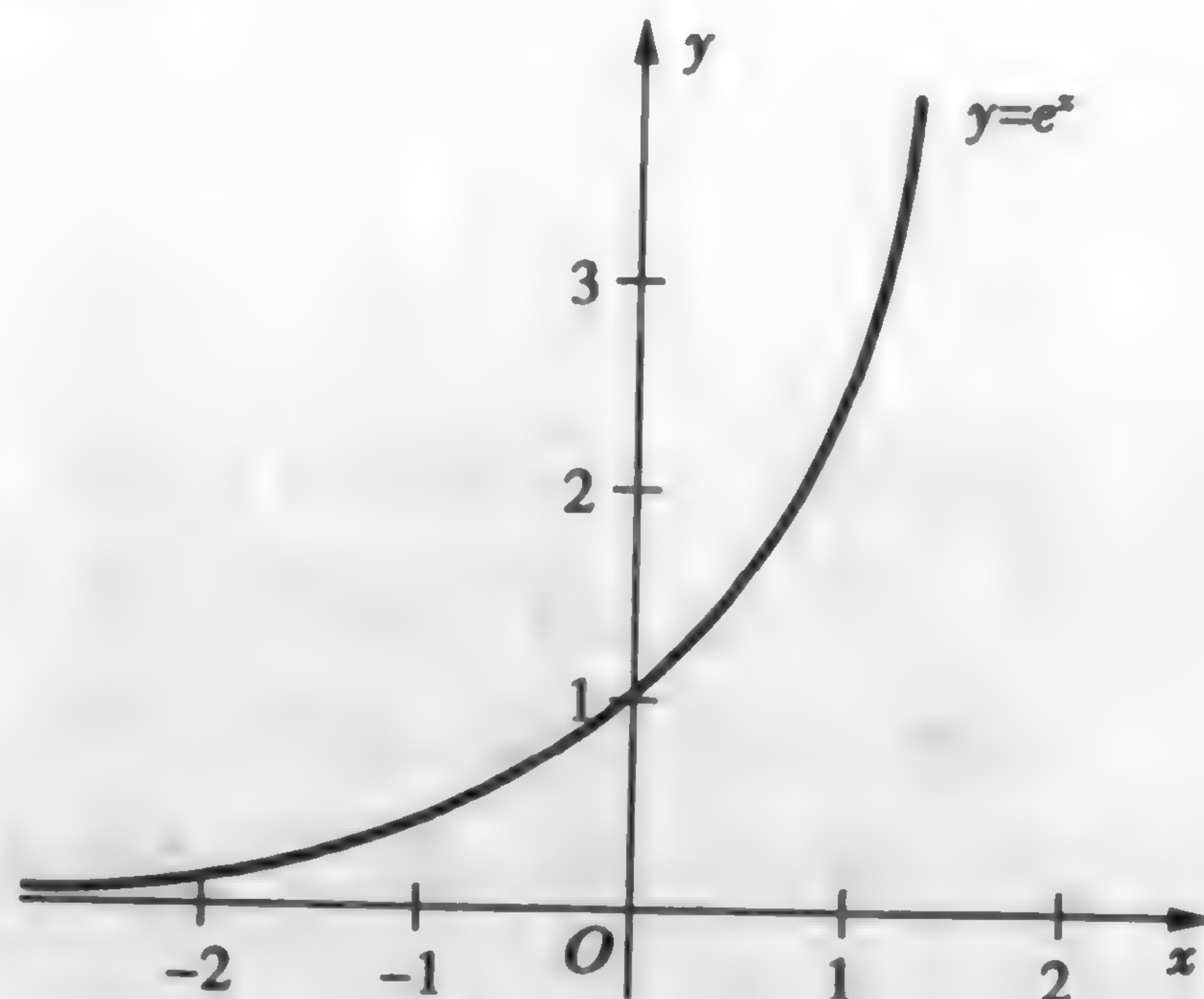


图 24.1　e^x 的曲线

24.2　对数

取对数刚好是取乘方的相反，比方说 $2^3=8$，那么在对数世界里，就要说成 $\log_2 8=3$，其中的 2 仍然叫做"底数".

这式子我们该如何记住，才不至于弄错呢？只要把底数搬到等号的另一边就成了，就像这样：

$$2^3=8\Rightarrow 3=\log_2 8$$

如果其中的底数是 e，我们就把这个对数函数写成 $\ln x$，并称之为"自然对数".

$$\boxed{\ln x=\log_e x.}$$

通常我们在微积分里遇到的是 $\ln x$，而非以其他数为底数的对数函数，不过无论所用的底数是什么，基本规则并无不同.

天下事物都各自遵守一些法则，对数函数当然也不例外，只是它跟其他数

学函数不同，遵循的法则自成一格．比方说：

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b.$$

$$\ln(a^b)=b\ln a.$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a.$$

别看这几个规则没啥了不起，你可是非得牢记并且最好爱上它们，因为马上你就会发现，它们能够省下许多计算上的麻烦.

指数与对数互为反函数，所以它们会把对方做过的事还原，有点像狗跟捡狗屎铲之间的关系：遛了一趟狗之后，没人看得出这只狗究竟去过哪儿．瞧瞧下面两个例子：

$$2^{\log_2 x}=x,$$

$$\log_2(2^x)=x.$$

如果我们用 b 代替 2，也毫无问题：

$$b^{\log_b x}=x,$$

$$\log_b(b^x)=x.$$ 只是其中的 $b>0$.

如果我们用的底数是 e，你应该仍然记得 $\log_e x$ 的写法是 $\ln x$ ，那么就得到：

$$\boxed{e^{\ln x}=x.}$$

以及

$$\boxed{\ln(e^x)=x.}$$

当 $x=1$ 或 $x=0$，我们可以看到两个重要的事实：

$$\boxed{\ln e=1,\quad \ln 1=0.}$$

现在让我们看看 $y=\ln x$ 的函数图像（图 24.2）．对数函数图像有几个特性：

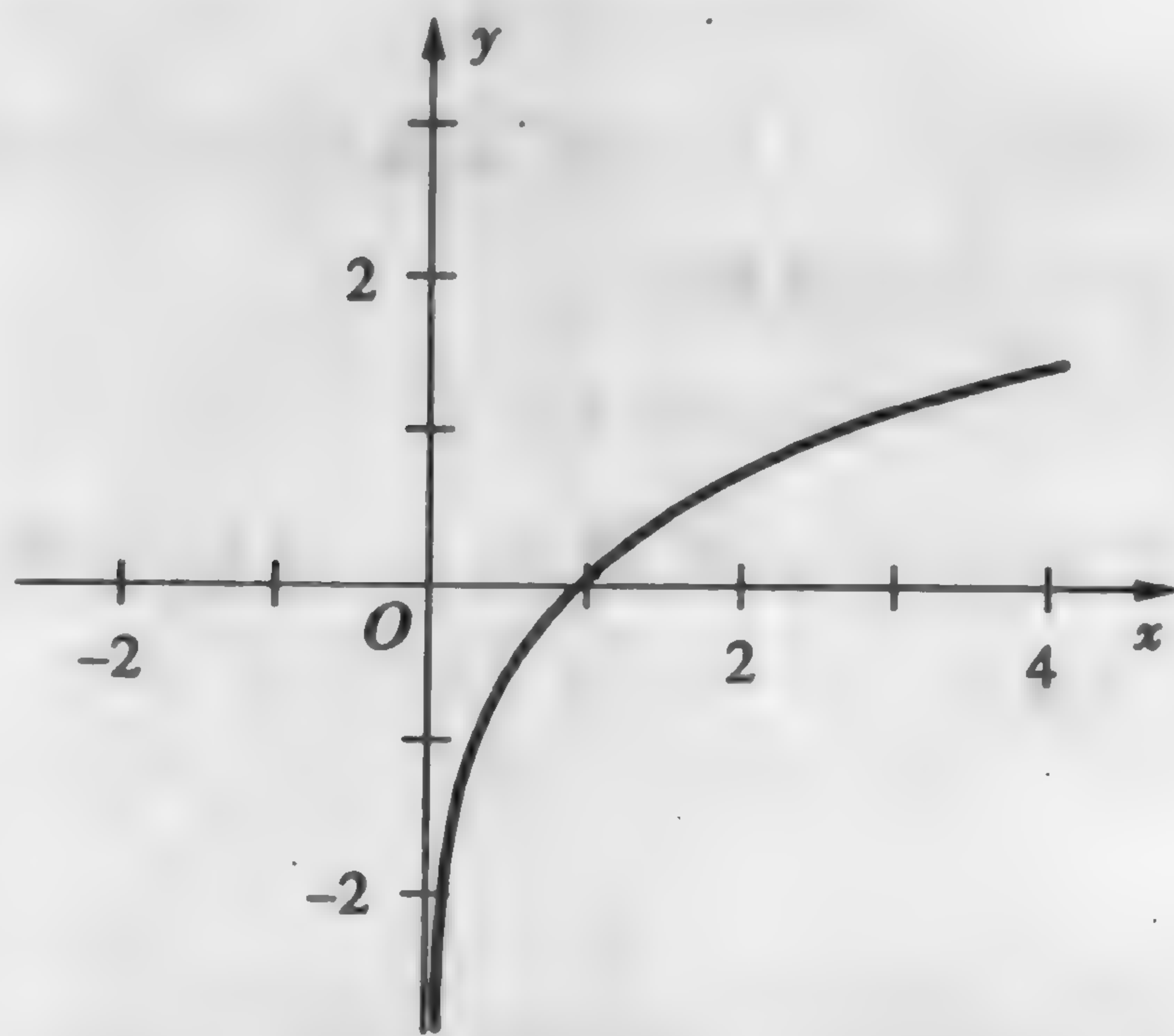


图 24.2 $y=\ln x$ 的图像

1. 曲线通过 (1, 0) 和 (e, 1) 两点.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

4. $\ln x$ 只对 $x>0$ 有定义.

5. $\ln x$ 永远是在递增.

6. 由于 $\ln x$ 是 e^x 的反函数，两者的曲线以 $y=x$ 这条斜线为轴，互为镜射 (见图 24.3).

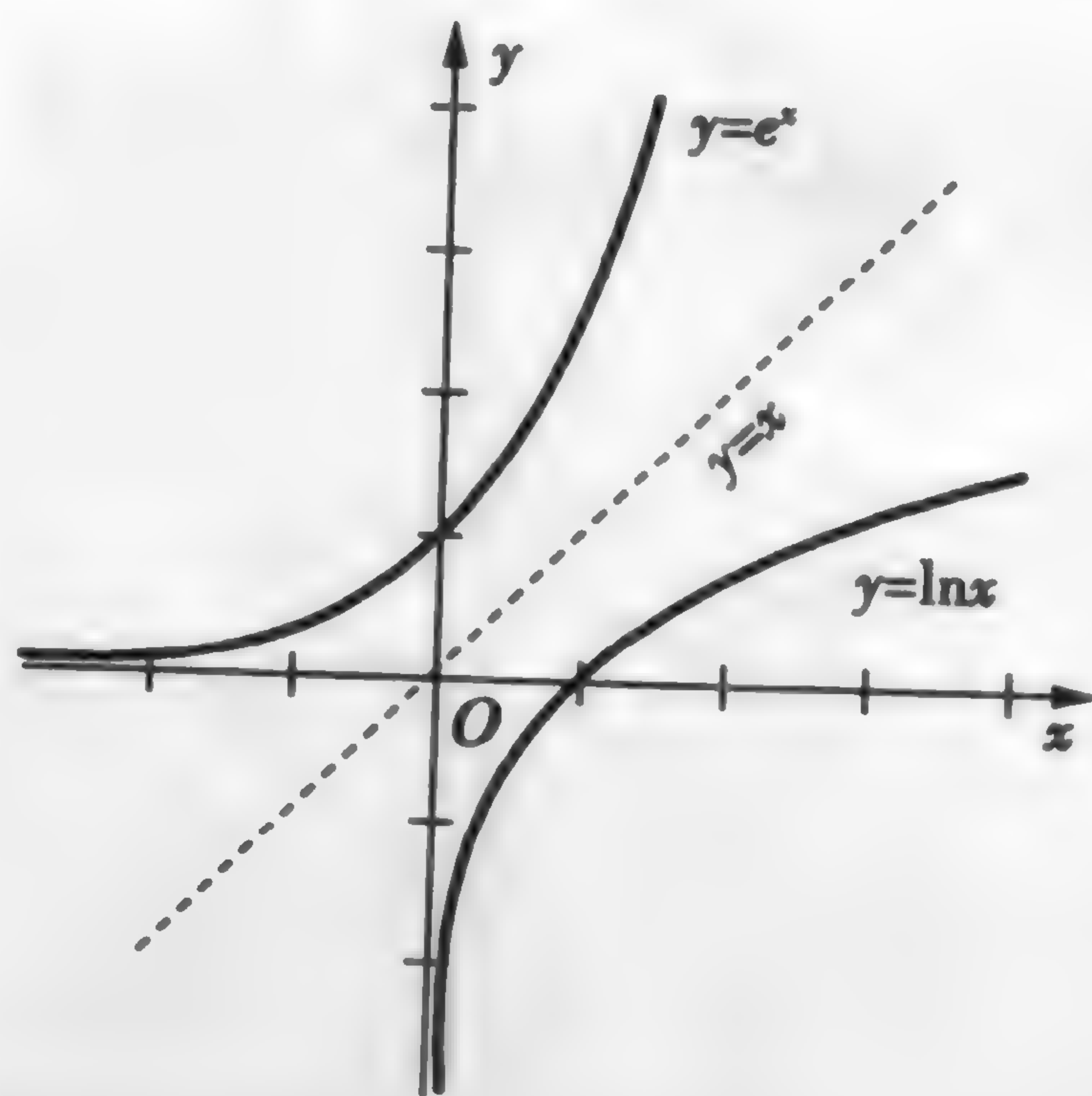


图 24.3 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 互为反函数

所以比较简单的办法是，你只需要记住其中一个函数图形，画出直线 $y=x$，然后对这条直线作一镜射. 不过，画好之后你得分辨得出谁是谁.

在这门课里，常有各式各样的考题，会利用到指数跟对数的性质. 即使这些问题与导数或积分没啥关系，但是大家并不认为有任何不妥. 下面就是一例.

例题 试证明：

$$\frac{\ln 3}{\ln 2}=\log_2 3.$$

好吧，我们先假设 $x=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$，则：

$$x\ln 2=\ln 3.$$

根据对数的其中一个法则，上式可改写成：

$$\ln\ (2^x)=\ln 3.$$

等号两边同时取指数，就得到：

$$e^{\ln(2^x)}=e^{\ln 3}.$$

又由于指数是对数 ln 的反函数，所以上式就变成：

$$2^x=3.$$

接下来，等号两边同取 $\log_2$，就成了：

$$x=\log_2 3.$$

这不就是题目里要我们证明的吗？

第25章 把微积分这玩意儿用到指数与对数上

现在让我们瞧瞧函数 e^x 与 $\ln x$ 的微积分.

25.1　微分 e^x 与 e^x 的朋友们

请记住:

1. e这个数的值大约等于 2.72.
2. 我们用 e 作为指数函数 e^x 与对数函数 $\ln x$ 的底数.

函数 e^x 有下面这个非常了不起的性质:

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x.$$

也就是说，e^x 的导数正是 e^x 自己. 这有点像是说某某人把自己给怀胎生了出来，这显然得具有异常超人的本领才行；这种怪事要是真的发生了，准会登上八卦新闻的头条:

最新劲爆消息，函数宣称："吾即吾母！"

事实上，一切函数之中也惟有 e^x 跟它的倍数，才等于它们自己的导数. 就因为这种特殊原因，我们才不嫌麻烦地用了这么一个永远写不完的无理数"2.718281828459…"来做为底数.

例题 试求 $\frac{d}{dx}(e^{\sin x})$.

请注意，$e^{\sin x}$ 是 e^x 与 $\sin x$ 的复合函数，所以我们要利用链式法则（见第 14 章），来求它的导数：

$$\frac{d}{dx}(e^{\sin x})=e^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x)=$$

$$e^{\sin x}\cos x.$$

$e^{\sin x}$ 就是外面这个函数 e^u，对里面的函数 $u=\sin x$ 微分得到的导数，而 $\cos x$ 是里面的函数的导数.

25.2 积分 e^x 与 e^x 的朋友们

我们保证你一定会喜欢这一节. 既然 $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$，我们马上就可以推知：

$$\int e^x dx=e^x+C.$$

换句话说，如果 e^x 是它自己的母亲，它当然也是自己的子女喽.

现在，再得用代换法（见 21.3 节），我们就可以轻易地求出许多长相不一样的积分问题. 比方说：

$$\int e^{3x} dx=\frac{e^{3x}}{3}+C$$

（你得先假设 $u=3x$，所以 $du=3dx$，以此类推）.

把上面这个式子推广，用常数 k 取代 3，就得到了：

$$\int e^{kx}\,dx=\frac{e^{kx}}{k}+C\text{，}$$ **其中的常数 k 可以是 0 以外的任何数**

我们可以利用代换法或眼球技术（见 24.1 节）看出：

$$\int e^{x^4}x^3\,dx=\frac{e^{x^4}}{4}+C.$$

25.3　微分自然对数

这儿咱们就不用拐弯抹角了．自然对数 $\ln x$ 对 x 微分就得到：

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}.$$

这相当出人意料！一个长相这么难看的函数 $\ln x$，导数居然会是这么漂亮的函数$\frac{1}{x}$！简直是“灰姑娘”故事的函数版，只是少了大南瓜、玻璃鞋，以及王子的一见钟情和锲而不舍．

现在，假如我们想要微分 $\ln\sqrt{x}$，我们可以走两条路：

第 1 条路：使用链式法则．

$$\frac{d}{dx}\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}.$$

第 2 条路：利用以下事实：

$$\ln\ (\sqrt{x})\ =\ln\ (x^{\frac{1}{2}})\ =\frac{1}{2}\ln x,$$

于是

$$\frac{d}{dx}\ln(\sqrt{x})=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln x\right)=\frac{1}{2x}.$$

一般说来，用链式法则我们可以得到：

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

这个公式非常实用，譬如说：

$$\frac{d}{dx}[\ln(x^3-7)] = \frac{3x^2}{x^3-7}.$$

25.4 当底数为其他数时

对数跟指数的底数几乎可以为任何一个数．由于我们有 10 根手指头，所以我们老想到 10^x，以及与它相对应的对数函数 $\log_{10}x$．因而在过去，所有的中学学生都学会使用以 10 为底数的对数表．如果人类只长了两根手指头，我们可能就会使用以 2 为底数的指数与对数了．讲到这儿，我们不是有两条手臂吗？这都无所谓了，你看，如今多数人都只用一根手指头在敲计算机，所以函数 $\log_{10}x$ 也正逐渐消失．

现在，我们来看看 b^x 跟 $\log_b x$ 的导数．我们一步步慢慢来，先来看 2^x．对微积分还不太熟悉的人，很可能会脱口而出地说：

$$\frac{d}{dx}(2^x) = x2^{x-1}.$$

这可是大错特错！你必须学习控制你的直觉．千万记住，幂法则（见 12.2 节）不能用于底数是常数、指数为变数的函数！在这里，正确的答案是：

$$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x\ln 2.$$

换句话说，它的导数等于它自己乘上一个 ln2．哎呀真玄！你一定会问，干嘛得乘上一个 ln2 呢？你瞧，根据对数的法则，$2=e^{\ln 2}$，所以 $2^x=(e^{\ln 2})^x=e^{x(\ln 2)}=e^{\ln(2^x)}$．接着使用链式法则，就得到：

$$\frac{d}{dx}(2^x) = \frac{d}{dx}e^{\ln(2^x)} = e^{\ln(2^x)}\frac{d}{dx}(\ln(2^x)) =$$

$$e^{\ln(2^x)}\frac{d}{dx}(x\ln 2) = e^{\ln(2^x)}\ln 2 = 2^x\ln 2.$$

基于同样的道理，我们可以把它推广成一般的情形：

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a.}$$

在下一章里，我们还会介绍另一种办法，来求$\frac{d}{dx}(a^x)$.

那么微分 $\log_b x$ 以后又会得到什么呢？我们是想求出$\frac{dy}{dx}$，而其中的 $y=\log_b x$. 但是 $y=\log_b x$ 不就是 $b^y=x$ 吗？所以，我们把 $b^y=x$ 对 x 微分一下：

$$b^y\ln b\frac{dy}{dx}=1,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b^y\ln b}=\frac{1}{x\ln b}.$$

于是，我们证明出下面这个公式：

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_b x)=\frac{1}{x\ln b}.}$$

以 b 为底数的对数函数在微分以后，多出了 $\ln b$ 这个因子. 至于以 e 为底数的对数函数，倒不是没有这个因子，而是由于 $\ln e=1$. 这么看来，e 还真是有用，不是吗？

25.5　积分与自然对数

见到这一节的标题，你准以为我们会开门见山地告诉你$\int\ln x\,dx$ 等于什么. 其实它的答案并非此处的重点，当然如果你一定想要知道，我们不妨就告诉你，答案是 $x\ln x-x+C$. 看起来蛮奇怪的，不过放心，没有任何老师会要求你把它背下来.（不过，这个答案可以用分部积分法求出，这个积分法我们在第 28.1 节就会讨论到，到了那个时候，这可是绝佳的例题呢.）

那么这节的重点又是什么呢？简单，我们只是要把下面这个式子逆转

过来：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)=\frac{1}{x},$$

以便得到整个微积分里面，最最有名的公式之一：

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$$

对此有两点要特别注意.

第一，在我们把一个似乎跟 e 毫不相干的函数$\frac{1}{x}$积分之后，结果居然得到了以 e 为底数的对数——真可谓匪夷所思，同时也凸显了 e 的不同凡响.

第二，不知道你是否第一眼就看出，答案里面的 x，左右两侧加上了绝对值符号. 这是因为自然对数函数仅只对正数有定义，所以若 x 为负值，而又没有绝对值符号，那么它就没有意义了. 该不该加上绝对值符号呢？那得看你啦，如果你要拿 90 分，就应该加，否则就别去管他.

例题 试求$\int \tan x\mathrm{d}x$.

我们知道 $\tan x$ 就是$\frac{\sin x}{\cos x}$，所以，

$$\int \tan x\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x.$$

若用 u 来代换，整个式子看起来会更清楚. 让我们假设 $u=\cos x$，于是 $\mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x$，上式就变成：

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{-1}{u}\mathrm{d}u=-\ln|u|+C=$$

$$-\ln|\cos x|+C=\ln\frac{1}{|\cos x|}+C=\ln|\sec x|+C.$$

怎么样，还满意吗？

第26章

对数微分法：化难为易

对数微分法非常实用、非常受人欢迎，它到底是怎么回事呢？说起来很简单，就是在把函数微分的整个程序里，在你正式取导数之前，先在方程式的两边取自然对数.

为什么要这样做呢？咱们且举一个例子，你看了就知道啦！

譬如说我们遇到下面这样的函数，要求它的导数：

$$f(x)=(x^2-3)(x^3-4)(x^7-5)(x^2-6).$$

对付这样的函数，我们前面学过的积法则，可以用来解决这个问题，然而可能得花掉你一个下午的时间（好啦好啦！我们的确有点夸大其词，不过最少也要 15 分钟），而且非常容易出差错. 为了省事，我们可以在上式两边先取对数：

$$\ln f(x)=\ln[(x^2-3)(x^3-4)(x^7-5)(x^2-6)].$$

然后，利用对数的性质，我们可以写成：

$$\ln f(x)=\ln(x^2-3)+\ln(x^3-4)+\ln(x^7-5)+\ln(x^2-6).$$

这下子，讨厌的乘积变成了可爱的和——这正是对数的功用所在.

接下来，我们把两端微分；根据链式法则，等号左边的导数就等于$\frac{f'(x)}{f(x)}$：

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x}{x^2-3}+\frac{3x^2}{x^3-4}+\frac{7x^6}{x^7-5}+\frac{2x}{x^2-6}.$$

够简单了吧？只是慢着，$\frac{f'(x)}{f(x)}$并不是我们所要的答案，我们要的是 $f'(x)$．这倒是不难，我们只消把式子的两端再乘以 $f(x)$，就搞定了：

$$f'(x)=f(x)\left(\frac{2x}{x^2-3}+\frac{3x^2}{x^3-4}+\frac{7x^6}{x^7-5}+\frac{2x}{x^2-6}\right)=$$

$$(x^2-3)(x^3-4)(x^7-5)(x^2-6)\left(\frac{2x}{x^2-3}+\frac{3x^2}{x^3-4}+\frac{7x^6}{x^7-5}+\frac{2x}{x^2-6}\right).$$

这就是答案了！而且这可要比用积法则去解，轻松、简单、省事多了．另外还有一个办法，是把函数中一个个因子乘起来展开，那就更难收拾了．

说到这里，千万别把上面这个答案乘开，否则你好不容易节省下来的解题时间，就又要泡汤啦！

好啦！我们把对数微分法的步骤再温习一遍．假设我们遇到一个函数 $f(x)$ 是很麻烦的乘积，而我们想知道它的导数．

1. 在等号两端取 ln.
2. 利用对数的法则，化简等号右边的式子．
3. 在两边取导数．让等号左边永远是$\frac{f'(x)}{f(x)}$.
4. 两边同乘以问题一开始所给的 $f(x)$，就得到我们所要的 $f'(x)$ 了．

最常见的错误：许多人会忘记最后同乘 $f(x)$ 的这一步．

除此之外，这个对数微分法还有什么其他的用途吗？且让你见识一下微分 2^x 的另一个简单办法：

假设 $f(x)=2^x$，我们要求 $f'(x)$.

首先，在两边取对数：

$$\ln(f(x))=\ln(2^x).$$

根据对数的法则，可得：

$$\ln(f(x))=x\ln 2.$$

两边微分取导数之后（记住，ln2 只是一个常数），得到：

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln 2.$$

所以

$$f'(x)=f(x)\ln 2=2^x\ln 2.$$

你说奇怪不奇怪？原先的函数里完全没有对数的影子，然而在把它微分之后，“ln”不知从哪儿冒了出来！这也就是为什么它会叫做“自然对数”的原因了——它就是这么自然的出现在许许多多的数学式子里.

第27章

指数增长与指数衰退：坏家伙的兴亡

呈指数成长的问题，通常都不是什么好事，若不是跟细菌培养的生长有关，就是扯上核爆炸大屠杀. 不过这至少告诉我们，即使是人生最黑暗的一面，都有一样可以用数学来解释.

基本上，在任何情况下，如果涉及到的函数的变化率跟函数值成正比，那么这个情形就是一个呈指数成长或衰退的例子. 这个定义读起来挺拗口的，不过如果我们从实际的例子去观察，应该不难了解.

比方说，族群生长就符合上述模式；现有的兔子数目愈多，兔群的生长率也就愈高. 另外，放射性衰变的过程也很类似，不同的是，放射性物质的量是随时间在逐减，而不是增加；也就是说，你有的放射性物质愈少，它每分钟的衰变就愈慢.

假设函数 N 代表在任何一个已知的时刻，我们手上的兔子的总数或钚元素的量，那么，该函数的变化率（通常称为该函数对时间的导数）跟函数值成正比，用数学式来表示，就写成：

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=kN,$$

其中的 k 只是一个比例常数，随着问题不同而具有不同的值. 在增长的情况下，譬如上述的兔子族群问题，k 是正值，这是因为我们讲的兔子族群函数 N，是个递增函数，因而$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$必为正.

衰退或放射性衰变的问题正好相反，常数 k 是负值，因为若要让在任一给定时间，放射性物质的量 N 为递减函数，则$\frac{dN}{dt}$必须为负值.

$\frac{dN}{dt}=kN$ 这个方程式，就是所谓的“微分方程式”，因为里面牵涉到微分，这个微分方程形式只是你现在可能接触的最简单的一个了.（好啦，好啦，还有一两个比它更简单的，比方说$\frac{dN}{dt}=0$，就是其中一个）.

跟绝大多数的微分方程不同的是，这个微分方程是可解的，意思是说，我们确实能够找出满足此方程式的一个函数 N 的一般型.

怎么找呢？首先我们得“分离变数”，把方程式中带 N 的项，全挪到等号的左边，同时把所有带 t 的项，都挪到等号的右边. 在做这件事时，我们甚至要把导数$\frac{dN}{dt}$当做一个普通分数看待，把分子、分母拆开：

$$\frac{dN}{dt}=kN,$$

$$\frac{dN}{N}=k\,dt.$$

然后两边积分：

$$\int\frac{dN}{N}=\int k\,dt,$$

$$\ln N=kt+C.$$

（有没有注意到？我们并没有对 N 加上绝对值符号，因为我们知道它是正的.）

其次，我们把指数函数应用到等号的两边，就会得到：

$$N=e^{kt+C}=e^{kt}e^{C}=Ae^{kt}.$$

由于 e^C 只是一个常数而已，犯不着写成这么复杂的式样，我们可以用一个简单的常数 A 取代它.

于是，$N=Ae^{kt}$. 这个式子挺有意思，你瞧，当时间 $t=0$，$N(0)=Ae^{k0}=A$，于是我们得知，A 等于 N (0)，也就是开始时 N 的量，我们通常把这个量写成 N_0.

因此，$\frac{dN}{dt}=kN$ 这个微分方程的解的一般式就是：

$$\boxed{N(t)=N_0 e^{kt}.}$$

这个方程式我们称为“指数增长”或“指数衰退”方程式．现在让我们把它应用到一些具有代表性的范例上．

例题（卫生问题） **假设你的淋浴间里面有一个细菌菌落正在生长，6月1日那天，总数是100万，到了7月1日那天，总数变成了750万．假定你的淋浴间里空间有限，充其量只能装得下10亿个细菌，试问：到了几月几日？你就必须开始跑到健身房去洗澡？**

好啦！我们知道你一定摆出一副不以为然的样子，心想：“拜托！就算细菌还没长满，甚至只到达半满，我也不会在里面洗澡，而且绝对会拒绝踏进去半步．因为我看不见它们，所以我根本无法预知什么时候不再进去洗澡，因此我认为你这个问题问得太牵强，完全没道理，我拒绝解题！”

然而你必须坚持下去，不到最后关头，不得放弃在你自己的淋浴间洗澡．你以为这儿是育幼院吗？这是数学课，不容许胆小鬼浑水摸鱼．

解：我们知道，这个菌落的细菌总数可表示为函数 $N(t)=N_0 e^{kt}$．依照题意，我们把6月1日那天设定为 $t=0$，那么一开始的细菌总数即为 $N_0=1\ 000\ 000$．于是，我们得到：

$$N(t)=1\ 000\ 000e^{kt}.$$

接下来我们需要知道 k 是多少．题目告诉我们，7月1日（或 $t=30$）的细菌总数，亦即 $N(30)=7\ 500\ 000$．把这个资料代入我们的函数，就得到：

$$7\ 500\ 000=N(30)=1\ 000\ 000e^{k(30)}.$$

$$7.5=e^{k(30)},$$

$$\ln(7.5)=30k,$$

$$k=\frac{\ln(7.5)}{30}\approx 0.0672.$$

接着，我们把 k 的值代入原函数，就可以得到：

$$N(t)\approx 1\ 000\ 000e^{0.0672t}.$$

这个式子告诉我们细菌在任何时刻的总数．那么，这个总数何时会等于

1 000 000 000？令它等于 1 000 000 000，然后求 t：

$$1\ 000\ 000\ 000 \approx 1\ 000\ 000 e^{0.0672t},$$

$$1\ 000 \approx e^{0.0672t},$$

$$\ln 1\ 000 \approx 0.0672t,$$

$$t \approx \frac{\ln 1\ 000}{0.0672} \approx 102.8(\text{天}).$$

所以，到了 9 月 11 日，你的淋浴间已达满是细菌的状态，即使你有意挤进去，大概也无能为力啦！

例题（到纽约市找住处的问题） 假设美国纽约市遭到了恐怖分子的核弹攻击，从此变得不适合居住，但是许多人仍认为没啥不同. 不管怎么说，我们假设在核弹引爆之后，纽约市受到钴的严重污染，剩余的强度是安全上限的 100 倍. 如果钴的半衰期为 5.37 年，请问最快得等多久，人们才能回到纽约市去住？

解：这是个衰变问题；理由可不是指我们所住的城中区正逐渐衰败，而是指放射性物质随着时间在不断衰变.

言归正传，遇到这问题该怎么解呢？首先，令 $N(t)$ 为城里在 t 时间的钴含量，而 t 代表距离核弹爆炸的年数. 于是，$N(t)=N_0 e^{kt}$，其中 N_0 是钴的初始量，k 是衰变常数（一定是负值）. 在大多数的衰变问题里，N_0 都是已知的，但是这一题则没说，不过倒是告诉我们钴的半衰期，由此我们可以算出常数 k.

由于钴的半衰期为 5.37 年，意思是指如果钴的初始量是 N_0，过完 5.37 年的那一刻，钴的量就会减半，成为 $\frac{N_0}{2}$. 所以 $\frac{N_0}{2}=N(5.37)=N(t)=N_0 e^{k(5.37)}$. 我们从这个等式求 k：

$$\frac{1}{2}=e^{k(5.37)},$$

$$\ln\frac{1}{2}=k(5.37),$$

$$k=\frac{\ln\frac{1}{2}}{5.37}\approx -0.129.$$

所以，$N(t)=N_0\mathrm{e}^{-0.129t}$就是钴在任何时刻 t 的剩余量.

现在我们要知道，到什么时候人们才可以安全地搬回纽约？题目告诉我们，一开始的钴量是安全上限的 100 倍，所以人人必须耐心等到钴的量低于 $\frac{N_0}{100}$之后，也就是到达安全范围之内的时候．我们如何计算出这个时刻呢？很简单，只需令钴的剩余量函数值为这个安全上限，然后求出 t：

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{-0.129t}=\frac{N_0}{100},$$

$$\mathrm{e}^{-0.129t}=\frac{1}{100},$$

$$-0.129t=\ln\frac{1}{100},$$

$$t=\frac{1}{-0.129}\ln\frac{1}{100}\approx 35.7(\text{年}).$$

还不算太坏，不过为自身安全考虑，我们应该至少等 36 年才行.

大块乳酪凶杀案　“哎呀！瞧瞧是什么风，把你这位全凭运气的大侦探给吹过来啦?”当私家侦探牛角先生踏进房间时，警官说道.

“看来你说话还是这副腔调嘛．说正经的，这回是谁遭到谋杀啦?”他一边跟警官调侃，一边打量着地板上扭曲变形的尸体．警官耸了耸肩.

“这家伙叫做何郎·芬特利，是芬特利羊乳酪事业继承人，有人在凌晨2:30发现了他的尸体．我看肯定有人对芬特利家族怀恨到了极点.”

“还有呢?”

“他的身体温度在凌晨3:00是华氏 85 度，4:00时是 78 度．别问我是怎么得知的，这你不会想知道.”

“好吧，警官大人，那么他又是什么时候断气的呢?”

“你问我？那我去问谁呀，牛角先生？你是侦探喽!”

“既然你这么说，我就给你免费上一课，也许以后你就不是只会测量尸体温度了．听好啦：假如尸体温度为 T，而且放在室温为 R 的房间里，那么它的冷却速度，会跟两者之差（即 $T-R$）成正比.”

“所以，决定尸体温度 T 的微分方程式就是：

$$\frac{dN}{dt}=k(T-R),$$

其中 R 是室温．当然，这跟决定指数增长或衰退的标准微分方程式有些不一样．”

“你说得没错．”

“不过求解的步骤没有什么不同，我们一样得把变数分离，把式中所有的 T 移到等号左边，并把所有的 t 移到右边：

$$\frac{dt}{T-R}=k\mathrm{d}t.$$

然后两端同时积分：

$$\int\frac{dt}{T-R}=\int k\mathrm{d}t,$$

$$\ln\ (T-R)\ =kt+C,$$

$$T-R=e^{kt+C}=e^{kt}e^{C}=e^{kt}A.$$

我们用 A 取代了 e^C，因为这些比较漂亮一些．”

“你一向对大写字母情有独钟，”警官插嘴进来，不过侦探没理他，继续讲解．

“我们把 R 移到式子的右边，就得到：

$$T\ (t)\ =Ae^{kt}+R,$$

其中 R 是室温，是个常数．现在的室温是华氏 70 度，因而我们会得到 $T(t)=Ae^{kt}+70$．”侦探瞄了警官一眼．

“这我听得懂．”

“我相信．现在，我们要利用你刚才量到的体温，来决定式子中的另外两个常数 A 跟 k，不过在此之前，我们还必须选个时刻，把它定为 $t=0$．这样吧，咱们就把你第一次替死者量体温的时刻，也就是早上 3:00，定为 $t=0$．”

“于是我们知道，$85=T(0)=Ae^{k(0)}+70$，所以，$85=A+70$，因此 $A=15$．代回原式就得到：

$$T(t)=15e^{kt}+70$$

“另外，我们还知道 $78=T(1)=15e^{k(1)}+70$，所以 $15e^{k}=8$，故

$$e^{k}=\frac{8}{15},$$

$$k=\ln\frac{8}{15}\approx-0.6286.$$

最后这一步是我用随身携带着的自然对数表查出来的. A 跟 k 都求出以后，我们的尸体温度函数就是：

$$T(t)=15\mathrm{e}^{-0.6286}+70.$$

“我们假设死者并不是刚泡完芬兰浴，所以他在断气的那一刻体温是一般人的华氏 98.6 度，我们令函数等于这个温度，然后求 t，解出的 t 就是他被谋杀的那一刻了.

$$98.6=15\mathrm{e}^{-0.6286t}+70,$$

$$28.6=15\mathrm{e}^{-0.6286t},$$

$$\frac{28.6}{15}=\mathrm{e}^{-0.6286t},$$

$$\ln\frac{28.6}{15}=-0.6285t,$$

所以，

$$t=\frac{\ln\frac{28.6}{15}}{-0.6286}\approx-1.02\ (\text{小时}).$$

“-1.02 小时，那是什么意思啊?”警官问道.

“那表示死者在凌晨 2:00 左右死掉的.”

“真有你的，大侦探！那他是怎么死掉的?”

牛角侦探弯下身，把手指伸入死者口中，猛拉出一大块乳酪，“如果我没猜错，”他说：“他是因为这块乳酪窒息死的.”

“你是说，他只是在吃乳酪时噎住了?”

“不不不，警官，我不是这个意思. 任何一个头脑清醒的人，更别说他这么一位乳酪专家，都不会把这么大块的乳酪塞进自己嘴里.”

“所以是另有其人啰?‘但是这块未免太大了吧，它是怎么塞进去的?”

“哎哟！你怎么会看不出来呢? 有一个办法一定可以.”

“是什么办法?”

"把它简单搓一下不就得了！"①

以上我们举了三个例子，分别是暴力谋杀，细菌，跟核武器大灾难，现在让我们瞧瞧，能否撇开这邪恶的一面，另外举出一则甜甜蜜蜜的增长或衰退问题作为本章的结局.

例题（园艺店问题）　有位名叫雅德蕾的可爱老太太，她把一生积蓄全部拿了出来，投资开设了一家专门种植雏菊的园艺店. 天公不作美，让她碰上旱灾，雏菊生长得非常糟糕，导致小店快经营不下去了，要是没有现金可周转，小店马上就得倒闭了. 雅德勒到处打听的结果，只有两个地方可以借到钱. 地下钱庄答应借给她 5000 美元，一年到期，利率 23%，以连续复利的方式计息；另一方面，她的亲生儿子同样也答应借给她 5000 美元，一年到期，但利率为 24%，每三个月以复利计息一次. 假设老太太到时不能连本带利还清，借给她钱的人就要把她的两条腿打断（别怀疑，亲生儿子也干得出这种事），试问她应该向谁借这笔钱呢？

真是很抱歉，提到打断腿的残酷条件，不过我们只是想实话直说，让你知道这类问题谈的就是生命无常，所谓"祸不单行". 不管怎么说，如果我们能够帮她选出条件较好的合约，也许到时她能还清欠款，躲过一劫.

解：首先让我们瞧瞧，她的儿子一共要她偿付多少钱. 他要的利息是年息 24%，也就是每季要 6%，因此当第一季结束时，她欠她儿子美金 $5000(1+0.06)$ 元. 由于是以复利计息，所以到第二季结束时，她欠她儿子 $5000(1+0.06)^2$ 元；第三季结束时，欠 $5000(1+0.06)^3$ 元；而到最后一季结束时，也就是一年借期到期时，她将欠：

$$5000(1+0.06)^4 \approx 6312.39.$$

无条件进位到 9 分钱（算钱时，她的儿子一向是无条件进位）. 既然谈到复利，不妨顺便提一下：如果你投资 P 元，为期 t 年，年利率为 r（以小数表示），每

① 作者在这里玩了一个文字游戏. 这句话的原文是 a simple twist of feta，英文里有个惯用语是 a twist of fate，意为："意想不到的命运."

年计息 n 次，那么等到 t 年期满，你连本带利可拿到的钱就为 $P(1+\frac{r}{n})^{nt}$. 我们刚才就用到了同样的推论.

好啦！现在我们再看看地下钱庄一共要老太太还多少本利和. 很简单，因为说好是以连续复利计息，所以老太太总共要偿还：

$$5000e^{0.23(1)}\approx 6293.00.$$

所以，向地下钱庄借钱比较划算——懂一点微积分，确实有好处. (附带告诉你后续振奋人心的结局：老太太在借得款项以后不久，在网上做了一个让人印象深刻的网页，结果，她的花店异军突起，最后竟发展成全国首屈一指的家庭式花卉公司，同时她也高薪雇用了她的宝贝儿子，叫他到公司上班，为的是可以每天羞辱他一番出气.)

应该记住的通式　如果我们投资 P 元滋生利息，年利率为 r，为期 t 年，且以连续复利计息，那么到期时的本利和就等于：

$$Pe^{rt}.$$

第28章 形形色色的积分技巧

这一章要来谈谈，我们先前一直不愿承认的积分难言之隐．其实绝大部分的积分，都像是既野蛮又肮脏的野兽，潜伏在微积分最黑暗的深处，完全不接受人们的安抚、驯化．它们又像一群游民，躲着亮光，从不换洗内衣裤．它们经常让人头痛．

有了这个比喻，你就能想象，让人手到擒来、顺利积分的积分问题，实属异数，其他的绝大多数都是要人使出浑身解数，连抓带咬，仍然负隅顽抗，坚决不肯束手就擒．所以若要降服它们，除掉其野性，我们还需要好几把刷子．这就是本章的内容和目的，教大家一些特殊的积分技巧，大幅增加我们能驯服的积分问题．

在开始之前，有件事你得先记住，那就是当我们讨论到某一个积分技巧，所举的例题都是必须利用该技巧来解的积分问题．但是当你在考试的时候，情况就不一样啦！题目旁边可没有任何章节标题或提示，告诉你该用哪一个技巧．所以，你得熟知积分问题跟各个技巧之间的关系，这样才能马上做出正确的判断，学着福尔摩斯的语气说：“华生啊！这个问题显然是用部分分式法嘛！”总之，能够判断出什么题目应该用什么方法，至少跟知道怎么用这些方法同样重要．

学习积分技巧的重要性　考完试后第三天，有位学生接到通知说教授要单

独见他，该生赶忙来到教授面前．教授对他说："我有坏消息和好消息要告诉你．坏消息是，你根本不了解积分的技巧；该用代换积分法的，你用了分部积分法，该用部分分式时，你偏偏用代换法．总之呢，你考得一塌糊涂，你这次的成绩差到无可救药的地步，我没办法让你及格．另外我也查过你以前的成绩，我不得不告诉你，你很快就会被退学啦！"

这个学生听了之后有如五雷轰顶，好不容易才勉强迸出两名话来："真是难以置信，怎么会这么糟？"突然他又想到教授刚才的开场白，于是问道："那么好消息是什么？"

教授神秘兮兮地斜靠过来说："这个星期五，纽约尼克斯队要跟波士顿塞尔提克队交锋，我好不容易才拿到一张场边的票……"

28.1 分部积分法

假如 $u\ (x)$ 跟 $v\ (x)$ 是 x 的函数，在求两函数乘积的导数时，我们学过的积法则（见 12.3 节）非常好用．

积法则 $(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$

当我们把这个法则反过来，会变成什么样的积分法呢？答案是我们所称的分部积分法（integration by parts）：

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

或写得更简单些：

$$\boxed{\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x.}$$

那么，将下列两式代入上式：

$$du=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=u'\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=v'\mathrm{d}x,$$

我们就得到分部积分法最常见的形式了：

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

这个积分法非常管用，但是有个应用上的窍门，那就是判断该让那一部分当做 u，哪一部分当做 $\mathrm{d}v$. 这颇像我们在梳头发时，是该中分、左分还是右分？许多美发师发现，如果他们无法决定该分哪一边，头发就会纠结在一起，他们的雄心抱负也会因此而耗尽. 不过话说回来，当你应用分部积分法时，若是作了差劲的选边，也有可能让你英雄气短，萌生干脆退学改行去干美发师的念头！所以请好好注意下面这些例题.

例题　试解 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

让咱们试试 $u=\ln x$ 以及 $\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$. 如果是这样，分部积分法的结果会是啥？我们把计算结果列出来：

$$u=\ln x, \qquad \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x, \qquad v=\frac{x^2}{2}.$$

我们把 $\mathrm{d}v$ 积分，得到 v；在这个例子里，$\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}$，所以 $v=\frac{x^2}{2}$. 这儿本来应该有个 $+C$，不是吗？不过我们可以假设它等于 0，因为在分部积分法公式的等号右边，还有一项未解的 $\int v\mathrm{d}u$，其中也暗藏着 $+C$. 于是：

$$\int x\ln x\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u =$$
$$\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\mathrm{d}x =$$
$$\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

这就是我们的答案了. 至于验证它是否正确，非常简单，只需取它的导数，看看能否还原成 $x\ln x$. 你这就去微分一下，我们在这儿等你.

例题　$\int \ln x\mathrm{d}x$ 又等于多少？

这个函数看起来不难积分，但是我们要从哪儿找出 u 跟 dv 呢？它们似乎藏了起来，就像在水槽底下活动的蟑螂．这样吧，我们假设 $u=\ln x$，而 $dv=dx$，为什么呢？因为我们知道如何微分 $\ln x$，所以把它当作 u 应当不错．只是如此一来只剩下 dx 了，没办法，也只能把它当作 dv 了．

好啦，分部积分法会给出什么样的结果呢？首先作个表：

$$u=\ln x, \qquad dv=xdx,$$

$$du=\frac{1}{x}dx, \qquad v=x.$$

然后使用分部积分法的公式，我们就得到：

$$\int \ln x dx = uv-\int v du =$$

$$x\ln x-\int 1dx = x\ln x - x + C.$$

真过瘾！可惜分部积分法不能应用到所有的函数上，但是一旦遇到行得通的题目时，准叫你觉得浑身舒畅，兴奋莫名．

如何决定哪个应该是 u、哪个应该是 dv 呢？

1. dv 必须选你能够积分的项，光是这个限制，就大幅缩小了选择范围．当然，选完 dv 之后，剩下的就是 u 了．

2. 选择好之后，式子的右手边会出现另一个积分 $\int v du$，这个新的积分理应比原先的积分容易解．如果这个积分更难解，不妨试试不同的 u 跟 dv.

28.2 三角代换法

在中学时，你也许学过正弦、余弦及其他三角函数所满足的几个恒等式 (identity)．现在所谓的身份认同危机（identity crisis），就是源自于此，意思是在考试时，忘记了某个重要的三角恒等式．

在所有的三角恒等式中，最不容易忘怀的大概就是著名的：

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

这恐怕是一般人惟一记得的一个．事实上，其他的恒等式大多能由这个等式演绎出来．

戏法（记住三角恒等式的简易方法）　我们从下列等式开始：

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

譬如说，如果我们把其中的每一项都除以 $\sin^2\theta$：

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}.$$

然后化简，就得到：

$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta.$$

若是将原式中的每一项改除以 $\cos^2\theta$，则得：

$$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta.$$

这些恒等式究竟有什么用途呢？答案是：我们有时可用它们来解决一些带平方根以及 x^2 的函数积分难题．下面所举的第一个例题十分浅显易懂，如果你能够理解其中的观念，以后在面对更困难的同性质问题时，就不至于茫然而不知所措．

例题　试计算：

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

看起来相当棘手嘛！若硬是用直接代换法及分部积分法，包管你剪不断、理还乱，吃不消兜着走．问题出在那个叫人伤脑筋的$\sqrt{1-x^2}$，要是能让它消失不见，就阿弥陀佛啦．怎么着手呢？不难．让我们假设 $x=\sin\theta$，于是

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta.$$

这样一来，至少讨厌的分母变得清洁溜溜了．但是就像代换法一样，我们不能把后面的 $\mathrm{d}x$ 放着不管，还得把它换成新的变数才是：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\cos\theta,$$

也就是

$$dx=\cos\theta d\theta.$$

于是这个积分问题就变成了：

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\cos\theta}\cos\theta d\theta=\int 1d\theta.$$

真奇妙，现在我们要积分的函数居然是常数 1：

$$\int 1d\theta=\theta+C.$$

你瞧简单不简单？但是别得意忘形，这可不是答案——我们必须把还原成 x 才行. 由于

$$x=\sin\theta,$$

因而

$$\theta=\arcsin x.$$

(还记得 arcsin 吧？这是正弦的反函数. 在本书一开始的高中数学复习章节里，我们曾经提到它，那时候你大概以为只是些不值钱的装饰品，现在你瞧，还真派上用场了呢!)

所以，让我们总结一下：

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int d\theta=\theta+C=$$

$$\arcsin x+C.$$

现在我们举一个比较难缠的例题，里面夹杂着捣蛋的常数.

例题 试计算：

$$\int\frac{1}{4+x^2}dx.$$

这题看起来似乎比上一题还简单，真的吗？其实它是扮猪吃老虎，你以为你一定能用普通的代换法，轻而易举地解决此题，那是你没实地做过，不知道厉害，不相信你就试试. 我们不陪你试了，而是要把分母的 $4+x^2$，变成其中一个三角恒等式. 该换成哪一个呢？如果我们用 $\tan\theta$ 去取代 x，分母就变成 $4+\tan^2\theta$，没办法换成哪个恒等式. 若是改让 $x=2\tan\theta$，情形就不一要啦：

$$4+x^2=4+\tan^2\theta=4(1+\tan^2\theta).$$

太棒了！$1+\tan^2\theta$ 正好等于 $\sec^2\theta$，因而

$$4+x^2=4\sec^2\theta.$$

其次，我们要改变剩下的 $\mathrm{d}x$. 由于 $x=\tan\theta$，故

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=2\sec^2\theta,$$

$$\mathrm{d}x=2\sec^2\theta\mathrm{d}\theta.$$

整个题目就变成了：

$$\int\frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{4\sec^2\theta}2\sec^2\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$\int\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\theta+C.$$

现在我们得把 θ 换回成 x. 记得当初的假设是

$$x=2\tan\theta,$$

所以

$$\arctan\frac{x}{2}=\theta.$$

于是就得到了：

$$\int\frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C.$$

这类积分问题为数不多，很不容易无中生有地造出来，因此在老师讲解这一类例题时，你最好特别用心听课，他交代的习题也要做得滚瓜烂熟. 想想看，你的任课老师在考试当天清晨 4:00，不得不从床上爬起来出考题时，你几乎可以确定，他（她）八成会出课堂里的例题，最多只是改改常数而已.

28.3　部分分式积分法

你遇到某位异性，双方一见钟情、情投意合，觉得对方就是你携手共度未来的良伴，于是不消多久，两人就决定同居了. 开始的几个星期，你们如胶似漆，相看两不厌，还有说不完的甜言蜜语.

不过好景不长，蜜月期刚完，你们的感情就开始变味了. 起初只是一些鸡

毛蒜皮的小事，譬如你发现即使灯开着，对方还是要用手电筒阅读书报；对方不准你吃芹菜，硬说嚼芹菜的声音是它痛苦的呻吟．终于有一天，你赫然撞见你的阿娜答正在用你的牙刷清理马桶！该是分手的时候了．

其实这就是部分分式积分法的核心概念．有的时候，处于同一个分母里的一对函数无法一同被积分，你试过了各种方法，结果都无济于事，它们合不来就是合不来，无意妥协，那就只有散伙啰．妙的是，这对水火不容的冤家函数一分开，成为两个互不相干的分式，一切困难烟消云散，这题积分便易如反掌．

请看下例：

$$\int \frac{3x-1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x.$$

这要直接积分，可不是一件简单的事，但是如果我们独具慧眼，能够看出：

$$\frac{3x-1}{x^2+x-2}=\frac{\frac{2}{3}}{x-1}+\frac{\frac{7}{3}}{x+2},$$

事情就迎刃而解啦！（你若存疑，不妨把等号右边的两个分式通分相加，看看是否果然等于左边．）接下来，我们就要来积分：

$$\int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x-1}+\frac{\frac{7}{3}}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{7}{3}\ln|x+2|+C.$$

简单吧？但问题是，我们如何能知道

$$\frac{3x-1}{x^2+x-2}$$

可以写成

$$\frac{\frac{2}{3}}{x-1}+\frac{\frac{7}{3}}{x+2}$$

除了独具慧眼外，还得有点代数头脑才行！这个跟代数有关的小技巧，就是部分分式法的重点所在．做法是这样的：首先把分母因式分解：

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2),$$

然后我们就可以写下：

$$\frac{3x-1}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}.$$

当然其中的 A 与 B 还没求出来．接下来，等号两边同乘 $(x-1)(x+2)$，就可得到：

$$3x-1=A(x+2)+B(x-1)=$$
$$Ax+2A+Bx-B=(A+B)x-(B-2A).$$

因为 x 可以是任何数，所以

$$A+B=3,\ B-2A=1,$$

而且两者必须同时成立．

从第一式，我们得到 $A=3-B$，代入第二式之后，可解得 $B=\frac{7}{3}$，由此再解出 $A=\frac{2}{3}$．有了 A、B 值后，我们就可以写下：

$$\frac{3x-1}{x^2+x-2}=\frac{\frac{2}{3}}{x-1}+\frac{\frac{7}{3}}{x+2}.$$

最后，再利用代换法及 $\int\frac{1}{x\mathrm{d}x}=\ln|x|+C$ 这条公式，就可以轻易得到答案了．

要拿 90 分的学生请注意：如果被积函数的分子与分母均为多项式，而且分子的次数比分母还高，如 $\frac{x^3-x^2-7x+2}{x^2-3x+2}$，那么在你应用部分分式法之前，记得先用长除法，让分子除以分母．譬如此处所举的例子，除完之后会得到 $x+2+\frac{-3x-2}{x^2-3x+2}$，于是前面的 $x+2$ 可以直接积分，而剩下的余式就用部分分式来积分，简单吧！



第29章 20个最常犯的错误

在本章里，我们将列出微积分老师在此批阅考卷时，所发现的几个最常见的错误. 如果你能避免重蹈覆辙，那么至少你所犯的错误会是一些不常见的！在这些错误中，大部分的问题跟微积分无关，而是跟代数有关，只要你小心计算、仔细验算，就能避免这类错误. 其他的常见错误，则牵涉到微积分方面的各种误解.

1. $(x+y)^2=x^2+y^2$ **错！**

不能这样乱平方. 正确的展开式是：

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2.$$

2. $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$ **错！**

分数相加的正确规则是：. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}.$

3. $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}+y.$ **错！**

这个错误经常发生，多半是由于不小心看错了分母. 要避免这种错误，在写演算过程时尽可能不要太潦草，或是多用括号.

4. $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. **错!**

记住，$\sqrt{x+y}$不能再进一步化简，它长得就是这个样子.

5. $x<y$，所以 $kx<ky$，其中 k 为常数. **错!**

若 k 为正值，这个叙述成立. 但是如果 k 是负值，中间那个不等号就必须颠倒过来，变成“>”；比如 $k=-1$ 时，若 $x<y$，则 $-x>-y$. 而当 $k=0$，就什么搞头也没有了.

6. 在处理分式的极限问题时，忘了化简. **错!**

譬如说写成 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}$，然后下判断说该极限不存在. 更糟糕的是把上下两个 0 相消，然后说它等于 1.

求极限时，任何时候如果出现了$\frac{0}{0}$，它就是一个大警讯，是在告诉你：工作还没做完！譬如以上所举的问题，正确的答案应该是：

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2.$$

7. $\frac{\sin2x}{x}=\sin2$. **错!**

分子与分母中的项，只有在它们不包含在任何函数里，或是可提出来成为乘数的时候，才能互相抵消. $\sin2x$ 这个函数，并不是 $\sin2$ 乘以 x；如果一开始就写成$\frac{\sin2x}{x}$，就比较不容易弄错了.

8. $ax=bx$，故 $a=b$. **错!**

这是一个比较微妙的错误. 这个消去的动作，只有在 x 不为 0 的条件下才能成立，比方说 $2x=3x$，就迫使 $x=0$，你绝对不能异想天开，把等式两边的 x 消去，然后说 $2=3$. 这样的结论至少在我们这个宇宙里是行不通的.

9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^x=x2^{x-1}$. **错!**

正确的答案是 2^x（ln2），见第二十五章．幂法则只能应用在底数为变数、指数为常数的函数，例如 x^3．

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x^2+1)=\cos 2x$．　**错！**

这是在应用链式法则时，常常犯下的典型错误．正确答案是：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x^2+1)=[\cos(x^2+1)]\ 2x.$$

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x^2+1)=\cos(x^2+1)+\sin 2x$．　**错！**

这同样是应用链式法则时常犯下的错误．这回显然是把积法则误用到链式法则上．

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x=\sin x$．　**错！**

答案应该是 $-\sin x$．这是非常普遍的错误，全世界修积分的学生，每年因为这个错误而损失的分数，加起来应该超过一千万分了吧！

13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{fg'-gf'}{g^2}$．　**错！**

分子的部分写反了，正确的是：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gf'-fg'}{g^2}.$$

14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln 3)=\frac{1}{3}$．　**错！**

ln3 是个常数，常数的导数都等于 0，所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln 3)=0$．基于同样的理由，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e})=0$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)=0$．

15. $\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}$．　**错！**

正确的答案是$\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+C$. 挑剔的教授最喜欢出这种题目，好扣掉粗心大意学生的分数.

16. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{x^0}{0}+C$.　　**错!**

积分里的幂法则对 x^{-1} 不适用. 此题的正确答案是

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$$

17. $\int \tan x\mathrm{d}x=\sec^2 x+C$.　　**错!**

这是在张冠李戴. 正确的是$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=\sec^2 x$，至于积分，则是:

$$\int \tan x\mathrm{d}x=\ln|\sec x|+C.$$

18. 忘了化简.　　**错!**

例如，你遇到

$$\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x,$$

如果你注意到 $x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$，事情就好办了，你可以应用幂法则来积分. 如果不幸你没有看出来，而径自试着用分部积分法或代换法，你就会发现你身在外层空间，却没穿太空服!

19. 没有把答案里的变量代换回原先的变量.　　**错!**

例如

$$\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$$

的答案不是 e^u+C，而应该是 $\mathrm{e}^{x^2}+C$.

20. 误解题意.　　**错!**

如果题目是要你求面积，你就别去算体积；要你微分，就别去积分；要你

用微积分的方法解题，就别用代数心算．把这一条加在这张清单里，虽然显得有点不伦不类，但是由于这种原因被扣掉的分数，可真是数也数不清．为避免这种伤感情的事也发生的在你的身上，你要养成习惯，考试时每做完一题，一定要回头把题目再读一遍，确定你解答了题目所问的问题．

21. 在你还没有准备好的时候，自以为准备妥当．　**错！**

这个错误可能是最重要的一个，所以虽然前面已经列出了限额 20 个，我们还是把它提出来警告大家．缺乏自知之明，或许多学生所犯的最大错误；往往他们看着题解，就错误地以为自己懂得怎么解题了．若想知道你自己有多大能耐，很简单，把书合上，电视机关上，门锁上，让那些平常喜欢指正你错误的朋友一概不得其门而入，然后模拟自己是在考试，去做几道题目．

第30章 期末考会考什么

啊！期末考．就是在短短一两个小时里，把整学期学到的十八般武艺，反刍到几张纸上的那档子事嘛．它就像地平线上将出现的暴风雨，让所有的学生闻之色变，为之惊慌．它的威力强大，足以摧毁刚起步的学术幼苗，把全部的校园社团组织夷为平地，叫平日不可一世的健壮运动员，可怜兮兮的跪地求饶．

但是你不用担心，因为在这最后一章，我们将告诉你，什么样的题目会出现在期末考中——至少就几率的角度来说．读了本章，包管你有备而无患，期末考轻松搞定．

以下是我们搜集的考题一览表，里面列出了各种类型的热门试题，以及会出现的几率．当然，你的教授可能有他（她）自己的偏好题型，以至于跟这份表相当不同．所以我们要特别声明，除了参考这张表，更重要的是你得把任课教授的讲课内容搞清楚．（这下子，万一你的期末考题跟我们预测的完全两样，你就不能上法院去按铃控告我们啦！）

1. 绘图题（最为普遍；出现在99％的期末考卷里）．这类问题是要你画函数图形，叙述大概像这样：

绘出下述函数的图形．标出所有的临界点、渐近线及截距．找出拐点，并

注明哪个部分是凹口向上，哪个部分凹口向下.

通常这种题目所给的函数，都不是容易对付的善类，如：

$$f(x)=3x^{\frac{2}{3}}-x^2+1$$

或

$$g(x)=\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}.$$

这类问题的目的，是要你运用所学的微积分，找出极大值、极小值等等. 这倒没什么问题，不过你若能另外多标出一些点，可以帮助你得到更接近真实的图形，验证你的其他计算结果.

遇到这种题目时，不妨先分别让 x 与 y 等于 0，算出截距. 记得要检查看看是否有没有意义的点——譬如那些会让分母变成 0 的点. 而极大值与极小值，可以在微分之后，设其导数为 0 而求得. 通常这种问题的微分很简单，不会花掉太多计算时间. 另外，别忘了把临界点的 x 代回原函数，以求得 y；当然，你得把 x、y 轴画出来，才能把图形画在上面. 为了避免把各个点的坐标混在一块，最好是列成一个表.

2. 微分问题（最为普遍；出现在 100%的期末考卷上）. 顾名思义，这类题目就是要叫你微分各式各样的函数，包括一些不是很讨人喜欢的函数. 这些比较难处理的函数，往往需要先应用链式法则、积法则等，分成多个容易对付的部分，然后再微分. 下面是几个常见的例子：

试求 $f'(x)$，如果

$$f(x)=\ln(\sin x);$$
$$f(x)=x(3x-x^2)^6;$$
$$f(x)=\sec x.$$

解这些题目时，特别注意你所写下的每一步，并且多用括号，这样你就能避免很多代数演算错误——演算错误是最主要的分数杀手之一.

3. 极限问题（非常普遍；90%的期末考卷上都有它的踪迹）. 一个典型的极限问题是：

试求以下几个极限：

$$\lim_{x\to 2} f(x),$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x),$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x),$$

其中的

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{如果 } x\leqslant 1,\\ 2x, & \text{如果 } 1<x<2,\\ x^2+1, & \text{如果 } 2\leqslant x.\end{cases}$$

这个问题里面的函数其实很简单，只是在不同的区间内有不同的定义. 也许是根源于婴儿期受到的某种心理创伤，大多数的学生在面对这类问题时感到莫名的恐惧. 也许你只是平日疏于做这方面的习题，因而对此感到陌生. 看到这样的题目时，最好的办法就是画出函数图形.

另一个典型的极限问题是：

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2},$$

当 $x\to 2$ 时，它的分子、分母都趋近 0. 情况大为不妙. 不过，你可以用一点代数技巧，来解这个问题：

$$\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=$$
$$\frac{(x-2)\ (\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4}=\frac{(x-2)\ (\sqrt{x+2}+2)}{x-2}=$$
$$\frac{\sqrt{x+2}+2}{1},$$

然后再取 x 趋于 2 时的极限，就可得到正确答案：

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x+2}+2=\sqrt{2+2}+2=4.$$

需记住的重点是：值代入之后若出现$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$，那就赶紧做些相消的步骤.（如果你试过了，仍旧不行，那么你可能需要动用更复杂的方法，例如洛必达法则（L' Hô pital's rule）如果洛必达法则还是不能奏效，那么需用别的方法，如果有效，那么就能很快得到结果.

注意！你的教授也极有可能出一道极限的难题考你，目的是看看你知不知道$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

4. 有关极大或极小值的文字题（非常普遍：期末考出现率高达 95%）. 一般说来，这类题目是要你把一个文字叙述的问题，翻译成一些数学式，然后求某一函数的极大或极小值. 这类问题的最困难部分，通常是在如何写出一个你要微分的函数. 只要你能写出来，求极大或极小值就非常简单：把函数微分，令导数为 0，然后找出临界点. 最后，你可以利用二阶导数、一阶导数或直接代入，来判定该点是极大值、极小值，或者两个都不是.

常见的陷阱：极大（小）值也许会发生在区间的边界，在这种情况下，它的导数虽然不见得等于 0，但仍然为绝对极大（小）值.

5. 定义域或连续性的问题（普遍；出现率在 50%左右）. 这类题目是要你判定给定函数的定义域，以及找出该函数在哪些部分是连续的. 题目所给的函数可能是分段函数，如：

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{如果 } x\leqslant -1,\\ \dfrac{1}{x}, & \text{如果 } -1<x<2,\\ x^2-1, & \text{如果 } 2\leqslant x.\end{cases}$$

解这类题目的重点，是查看函数里的分母在哪个点会变成 0（以上面所举的函数为例，就是当 $x=0$ 时），其次，得查看各段函数的分段点（在这个例子里，分段点就在-1和 2 这两个点）.

6. 导数的极限定义（普遍；出现率在 50%左右）．这类问题是要你直接从极限的定义，算出导数．能够从极限算出导数的函数并不多，主要可分以下四大类型：

(a) x、x^2，或 x^3．更高次的非常少见．

(b) $\sqrt{x}$．极限的求法是：让分子跟分母同时乘上$\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$.

(c) $\frac{1}{x}$.

(d) 简单的多项分式，例如$\frac{x-1}{2x+5}$.

7. 速率或速度问题（普遍；出现几率为 50%左右）．这类题目一般会牵涉到棒球、赛车、子弹、飞机、溜溜球或是跳伞选手（包括有降落伞和没降落伞的）．你必须记住，速度是位置的导数，而加速度则是速度的导数．另外也要特别注意，别把正负号给弄颠倒了．还有就是要记得，凡是向上抛的东西，迟早会再摔落下来；你怎么对待别人，别人也会同样对待你；你吃什么，就会是什么．

8. 相关变化率问题（普遍；出现在期末考卷上的几率是 50%）．从字面上，不难理解相关变化率问题在讲些什么——题目里会有两个变化率，而且两者是相关的．你可以用其中一个函数表示另一个，而这也就是解这类问题的诀窍．最困难之处通常在于如何把文字叙述转成方程式，以及去搞清楚题目究竟在问什么．

9. 隐微分（普遍；出现几率约 40%）．如果没办法把题目的方程式写成 $y=f(x)$的形式，你势必得用隐微分的方法去求$\frac{dy}{dx}$．如果题目要你计算某一点（x_0，y_0）上的$\frac{dy}{dx}$，而且两坐标都告诉了你，那就是摆明了叫你用隐微分．

10. 求近似值（较不普遍；出现在期末考的几率仅 20%左右）．这类问题是要你估计一些值，譬如$\sqrt{3.9}$和 $\sin(\pi+0.1)$.

11. 切线方程式（较不普遍；出现在几率仅有 20%）. 这类问题是要你找出通过函数上某一点的切线方程式. 解题的诀窍在于，你必须微分该函数，以得到切线的斜率.

12. 求积分的问题（最为普遍；100%会出现）. 一般说来，试卷上只有一堆题目，但不会告诉你该用哪种方法，这得靠你自己决定了. 下面我们大略列出哪些积分问题该用哪种方法，给你参考：

* 代换法：$\int x^2 e^{x^3} dx$、$\int x\sqrt{x^2+1}dx$、$\int \sin^3 x\cos x dx$.

* 分部积分：$\int \ln x dx$、$\int x\ln x dx$、$\int xe^x dx$、$\int x\sin x dx$、$\int e^x \sin x dx$.（最后这一题相当难缠，需要连续做两次分部积分，并且要重排积分项的顺序.）

* 部分分式：$\int \frac{1}{x^2-1}dx$、$\int \frac{2x-3}{x^2-5x+6}dx$.

* 三角代换法：$\int \frac{1}{x^2+1}dx$、$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

13. 求平面上各函数曲线中间所夹的面积（普遍；出现在期末考的几率为 50%）. 这类问题的标准解法是：把位于上方的函数减去位于下方的函数，让相减的结果作为被积函数，然后积分；积分极限可能是题目所给的上下限，再不然就是两函数曲线交点所决定的上下限.

14. 用数值逼近法求定积分（较不普遍；出现的几率为 20%）. 这类问题是要你利用有限的黎曼和、矩形法、梯形法或辛普森法，来求一个定积分的近似值. 之所以比较少出现在期末考，原因一共有四：第一，太花时间；第二，考的只是学生的死背能力；第三，解题的过程既多又琐碎；第四，批阅时会让任课老师头痛三天.

15. 指数成长及衰退的问题（相当普遍；出现在期末考的几率约达 70%）. 若是老师在课堂上讲过这类问题，期末考卷上非常可能有它们的份儿.

词汇表 数学名词活学指南

callipygian：这是个形容词，在一些字典上出现在 calculus（微积分）的附近．请自行查字典．

e：这个数 e＝2.71828…非常重要，重要到有专用的名字．为什么那么重要？这样说吧，在你写英文句子时，有没有哪一句里面没有 e？事实上，e 是 26 个英文字母里面最常用的字母！它在微积分里也不遑多让．e 还有一个非常独特的性质，那就是：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}.$$

π：它的值等于 3.14159…，可说是“数字名人堂”中的领袖．你可以把它定义为：直径为 1 的圆的圆周长．

既然 π 是个希腊字母，你可能会认为，一定是有某些古希腊先贤，想到用字母来代表 1 单位直径的圆的圆周长．没错，的确是古希腊人想到的，只不过选用 π 的人不是他们，而是几百年前的一位英国人．他从没说明为什么选用了 π，对此有各种牵强附会的说法；有人认为是因为圆周的英文字 perimeter 以 p 开头（相当于希腊字母的 π)，另外一些人则认为，发明者喜欢吃一块美味的馅饼，来当做午餐．

不过，有些古希腊先贤确实留下了一个不太高明的文化遗产，就是用 360 度来度量角度. 360 这个数字究竟打哪儿来，我们也不清楚，不过据说与比萨饼容易切成同样大小的 6 块，有某种关联. 在涉及角度的数学计算上，另外一种叫做“弧度”的度量方式，会使计算简单容易得多；你也可以说，用弧度来切 π 更是得心应手.

对于绝大多数的场合，π 的值精确到小数第二位，用 3.14，便已经绰绰有余了. 人类花费了数千年时间，才把 π 的值算到了小数第 10 位，如今许多数学家已经把 π 计算到了小数第 30 亿位. 幸运的是，大多数的教书先生都不会要求学生背出 π 的前 10 万位小数.

二划

二次公式（quadratic formula）：求解二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的伟大公式；即使你不会因式分解，套此公式，保准你一举找出解. 二次方程式有两个解，分别是：

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

与

$$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

而且来者不拒，只要是二次方程式，就都有解.

二阶导数（second derivative）：一阶导数的导数，而它的导数则为三阶导数；也就是你把一个函数连续微分两次之后，所获得的那个导数.

二重积分（double integration）：冷静下来，别紧张. 像你这样一见到这几个字就坐立不安，准是有个正在修多元微积分的混蛋吓唬过你：“你以为积分很难是不是？那你就等着让二重积分把你撞个鼻青脸肿.”首先，那浑小子说的根本不是实话，二重积分没有他形容得那么难. 其次，你现在何必紧张？时间还早哪，别让它破坏你的快乐时光！

三划

三角恒等式（trigonometric identity）：可表示不同三角函数之间关系的简单方程式．这种方程式虽然形形色色，其中最著名也最重要的一个，就是此中翘楚：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$．由这个经典方程式，很容易得到其他的三角恒等式，譬如等号两边同除以 $\cos^2 x$，就得到 $\tan^2 x+1=\sec^2 x$．

全局［极值、极大值、极小值］（global [extremum, maximum, minimum]）：这是绝对极值、绝对极大（小）值的另一种说法．Global 源于 globe（有“全球”的意思），所以这样的极值从字面上说就是指全球最极端的极值．

四划

不定积分（indefinite integral）：函数 $f(x)$的不定积分，也就是一个导数为 $f(x)$的函数 $F(x)$．千万别把不定积分跟定积分混为一谈，定积分的结果是一个数．不定积分又可称为 $f(x)$的反导函数（antiderivative）．

切线（tangent line）：跟一条曲线上的一点碰触到、“亲吻”到的直线，它的斜率就是该图形在那一点的斜率．现在它正临着性骚扰的指控．

反三角函数（inverse trigonometric function）：就是与原三角函数作用刚好相反的函数，颇类似美国的民主党与共和党轮流执政时的情况，这一任把前任完成的政绩一一颠覆掉．正弦的反函数为反正弦，表示为 arcsin；如果 $y=\sin x$，则 $x=\arcsin y$．使用的符号之所以是 arcsin 而非 $\sin^{-1}$，是要避免我们把反正弦函数跟$\frac{1}{\sin x}$弄混了．

反导（函）数（antiderivative）：你猜对了，它就是导数的相反．不过别误会，它与“反基督”、“反社会”等其他“反”字头的词汇不同，一点也没有负面的含义．函数 $f(x)$的反导数也是一个函数，一般表示为 $F(x)$，$F(x)$的导数就是 $f(x)$．传统上，“反导（函）数”这个名词通常用来介绍、引出不定积分

的概念，之后就再也用不到，而由“不定积分”给取代了.

反微分（antidifferentiation）：求反导数的过程. 此外也是坚决要一视同仁的意思，就好像有的父母坚持要把五个小孩全都取名为“宝”[①]

五划

代数（algebra）：等等！如果你居然不知道代数是啥东西（就是一堆像 x、y 等字母，加上一堆把它们搞在一起的规则），就不该来修微积分. 请退回到“大富翁”起点，而且领不到＄200.

凹性（concavity）：在函数图形的某一段，如果像苦瓜脸的嘴形部分，我们就说它是凹口向下；若是反过来，看起来像杯子状，就是凹口向上（杯子的英文是 cup，向上的英文是 up，这个联想可以帮助你记忆）. 为了决定一个函数在某处是凹口向上或凹口向下，我们得动用二阶导数，如果你想知道相关细节，请看第 15.3、15.4 两节.

加速度（acceleration）：速度的变化率. 当开车的人把油门一踩，你的身体猛然压向椅背，胃里面感觉怪怪的——那就是加速度搞的鬼. 函数的变化率就是它的导数，所以加速度是速度函数的导数，又由于速度本身是位置函数的导数，所以加速度就是位置函数的二阶导数. （写成数学式就是：$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$，其中 s 是位置函数.）

可微函数（differentiable function）：若函数在某点有导数存在的话，我们说该函数在该点可微. 比方说，函数 $f(x)=x^2$ 在每一点都是可微的，但是函数 $g(x)=|x|$ 则不然，它在 $x=0$ 这点不可微. 既然微分就是取导数，这里为什么不说 derivativable（可取导数）呢？这是因为它听起来太拗口了.

---

① 英文 differentiation 另有“区别”的意思.

可积分的（integrable）：当我们说某某函数可积分，意思就是指该函数的积分存在．大部分的标准函数都是可积分的．

正弦（sine）、**余弦**（cosine）：在聚会上，数学家喜欢相互询问的两样东西．

正交（orthogonal）：数学上专门用来表示“垂直”的花俏字眼．

六划

多项式（polynomial）：顾名思义，就是如 x^2-7x+3 或是 $2y^{15}-4y^3+3y-6$ 之类的函数．多项式里面并没有任何如方根、三角函数等长相有点奇怪的东西．若以一般形式来表示，多项式就是

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

有理数（rational number）：指那些脚踏实地的数，还有就是可写成$\frac{a}{b}$形式的数，其中的 a 跟 b 均为整数．常见的有$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$，不太常见的有$\frac{337}{122}$．每一个有理数都可以写成小数的形式，写成的小数要么是个有限小数（小数位数为有限多个），要么就是个无穷的循环小数．有趣的是，这世间的无理数远比有有理数多得多——这又是数学模拟真实人生的例子．

有理函数（rational function）：从英文字面来看，是指“很有道理的功能作用”；在数学上，则指两多项式的比率，如$\frac{x^2-2}{2x^3+1}$．

自然对数（natural logarithm）：就是以 e 为底的对数，通常用 ln 来表示．

七划

位置函数（position function）：随着时间在变化、且能告诉你在某一时刻你沿着数线的位置的函数．譬如说 $f(t)=t^2$，而使用的单位是英尺（或米）和

秒，那么在时间 $t=0$ 时，你的位置是在原点上；在时间 $t=1$ 秒时，你在原点右方 1 英尺的地方；到时间 $t=2$ 秒时，你在原点右方 4 英尺处.

局部［极值、极大值、极小值］（local［extremum maximum minimum］）：如果你目光短浅，你会觉得这个点就是函数的极值（极大值或极小值），但是你若把函数图形拿远一点看，可能就会发现远处还有一个更大或更小的值，不过只就该点的附近来说，它仍然为最高的点（即局部极大值）或最低的点（即局部极小值）. 局部极大值就像小池塘里的大鱼，至于局部极小值，若能出外闯荡一番，就有可能找到比它更小的了.

芝诺（Zeno of Elea）：任何一本微积分英文词典里的最后一个词条. 芝诺是公元前 5 世纪的古希腊哲学家，因为芝诺悖论（Zeno's paradox）而著名. 他指出，如果一个人要从 A 点跑到 B 点，他（她）必须先跑完全程的一半，然后跑完剩余路程的一半，再跑完剩余部分的一半，接着要再跑完剩余的一半……（永无止境）. 显然，没有人能够在有限的时间里面完成无穷多步，所以这种跑步运动是不可能完成的事，是个幻象. 以此类推，整个世界无非是一场梦境. 何不翻过身子，继续睡你的大觉？

车速表（speedometer）：仪表板上的一个基本仪表，告诉你车子现在跑多快. 其实它是一个速度函数，会随时告诉你车子当时的速度（亦即你的位置函数之变化率）——倒车时除外.

直线（line）：在你等候购买这本书时，我们希望你乖乖排成的那条东西. 在数学里，若问直线是什么，连小学生都知道：就是两点中间那根直直的东西. 直线的方程式通常有两种形式. 一种是点斜式，$y-y_0=m(x-x_0)$，其中 (x_0, y_0) 是直线上之一点，而 m 则是该直线的斜率；另一种斜截式，$y=mx+b$，其中的 b 是直线与 y 轴的交点的 y 坐标，而 m 仍是斜率.

抛物线（parabola）：一种曲线. 能写成 $y=Ax^2+Bx+C$ 这种形式的方程式，图形就会是一条抛物线. 最常见的例子是 $y=x^2$，它会通过原点，形状颇

像一只开口朝上的杯子.（paraboa 的字首 para-，源自希腊文，意思是“在……旁边”或“超越……”，例如 paralegal、pranormal 等等；又如巴拉圭，Paraguay，就位于 Guay 这个甚少有人知晓的小国旁边.）

如果你拿一个平面切过一个直立圆锥，而且让切过的角度与通过圆锥顶点的任何一条圆锥上的直线平行，也可以得到抛物线. 这方法相当实用.

八划

函数（function）：四年的大学生涯中，没有人能够避开这个东西，甚至连那些从不碰带有“计算”字眼的任何课程、主修广电的大学生也不例外. 原因，function 有两种：social function 以及 mathematical function；意义固然不同，却使用了许多共同的术语.

譬如在美国，社交聚会（social function，又称为 mixer 或 gathering）通常以派对的方式进行，由某栋学生宿舍的整层楼做东，加上几桶啤酒（或一些小黄瓜三明治）助兴. 举行派地的地点，也称作 domain of the function；烹饪食物的地方则叫做 range of the function；这样的联欢会若是持续到第二天早上，就称它为 continuous，若是半夜来了校警强行制止，因而隔天再回来重聚，则称为 discontinuous. 至于你在派对上遇见的梦中情人的电话号码，可以称为 value of the function，而这个电话号码往往是众多号码的其中一个，是落在 range 之内.

数学家也用了同样的术语，来形容他们所说的 function，最主要的不同是，当数学家有一个 function 时，每个参加者都只会得到一个 value！在 mathematical function 中，没有会得到两个电话号码，也无人空手离去.

数学函数像一部机器，你喂进去一个实数（通常以变数 x 代表，有时也用 t 或其他字母代表），它就会吐出一个全新实数. 比方说函数 $f(x)=x^2$，你把 3 这个数喂给 x，它就吐出 9 这个数. 它的定义域就是你能合法喂进去的全部值的集合，而值域（range）则是它可能吐出的所有值的集合.

函数的定义域（domain of a function）：一只狗的领域是指他一日下来所走过、撒过尿的地盘面积. 函数 $f(x)$ 的定义域，则是指代进 $f(x)$ 以后，可使函数值有意义的所有 x 值. 比方说 $f(x)=\sqrt{x}$ 的定义域，就是所有 $x \geqslant 0$ 的 x 值.

函数的复合（composition of functions）：把一个函数代进另一个函数．譬如说：$\sin\sqrt{x}$的 $\sin x$ 跟$\sqrt{x}$ "复合"起来的函数．如果配合得很完美，两函数就会随着音乐翩翩起舞．

定积分（definite integral）：在 $a\leqslant x\leqslant b$ 的区间内，函数 $f(x)$的定积分结果是一个数，它有时可想成是函数图形下方的面积．千万不要与不定积分混为一谈，不定积分的结果是一个函数．

定理（theorem）**与证明**（proof）：定理就是对某一主题所作的主张，譬如："$\sin x$ 的导数即 $\cos x$"．而证明则是一套详尽、合逻辑、完全能说服人的论证，说明为什么某个定理为真．学会分辨什么才算是证明、什么不算证明，是你修微积分最重要的收获之一，不过，在修课人数众多的课堂上，这问题极少有机会好好讨论．

好的证明应该能够说服所有讲道理的人．当然，在各路英雄好汉云集的聚会上，总免不了遇到一些怪胎会问你："等一下，万一在你讲解证明的时候，有火星人把我催眠了，怎么办?"或者"真理不是相对的吗？那为什么有的真理会比另一个真理更好?"幸好，聚会的主办人几乎不会再邀请这种人．

由于律师们对数学家有些偏见，认为他们无法了解法律上所说的"无合理怀疑的证据"，所以有意无意地把数学家从陪审团名单中剔除．因此，如果你不想被请去当陪审员，你可以放话说你在微积分课堂上学过定理与证明．基于相似的理由，微积分课不欢迎律师，因为数学家相信律师无法了解"证明"的数学意义．（如果你现在就是律师或未来要做律师，请不要控告我们．）数学家和律师一样，老爱用一堆术语，所以光是"定理"本身，又有定理、系理（corollary）、引理（lemma）与命题（proposition）之分．

九划

弧度（radian）：角度的度量单位．1 弧度相当于$\frac{180^\circ}{\pi}$，信不信由你，而 1 度就等于$\frac{\pi}{180}$弧度．

指数（exponent）：书写在数或函数右上角的缩小数字．也有人称之为幂或乘方（power）．不过，要是你离婚了，而你的老外朋友问你：“How's you ex?”这时他们指的可不是指数．

指数函数（exponential function）：即 $f(x)=e^x$．它最著名的特性是什么？就是它是自己的导数．这就像变成了你自己的母亲，是非常不容易做到的事！

指数增长（exponential growth）：这是一种“非常非常快速的成长”．每当有人说指数成长的时候，目的无非是希望你印象深刻．可表达出指数成长的函数，至少需要 CK^x 的形式，其中的 $C>0$，而 $K>1$．比方说，2^x 就符合指数成长，它意味着每当 x 增加 1 单位，函数 2^x 就会变成两倍．因此，虽然 2^1 仅仅等于 2，2^{10} 已经变成 1024，而 2^{20} 居然是1 048 576．这真是非常非常快速的成长．

映射（map）：危险！危险！如果你的教授使用这个字眼来指称函数的话，那么你就遇上大麻烦啦．这表示他（她）是理论数学家，并且不大能够把理论世界跟教室里的世界分开．“映射”的确是函数的另一个称呼：“这是从实数到实数的映射”的意思就是“这是把一个实数转换成另一个实数的函数”．

负数（negative）：即悲观的或沮丧的．常用“百忧解”来治疗．

值域（range）：你能把棒球掷得多远，就是你投球时的 range（距离、射程）．对函数来说，所能取的值的集合即该函数的 range（值域）．数学家在厨房里的炉灶（range）烹煮食物；菜单上的鸡鸭美食所用的鸡是放养的（free-range）鸡；说到家，真希望我家门前有牧场（range）……当我没说．

十划

原点（origin）：空间中的一点，它的所有坐标都等于 0．

配方法（completing the square）：配方？什么配方？理论上，你在中学就应该学过这个了．复习配方法，最好是用例子示范：如果想要把函数 $x^2+8x+10$ "配方"，我们就要写成：

$$x^2+8x+10=x^2+8x+(\frac{8}{2})^2+10-(\frac{8}{2})^2=$$

$$x^2+8x+(\frac{8}{2})^2-6=(x+4)^2-6.$$

我们为什么要做这个"配方"的动作呢？让我举同一个例子来说明：假设你要画 $x^2+8x+10+y^2=0$ 的图像．经过配方以后，这个式子就变成：

$$(x+4)^2+y^2=6.$$

你一看就知道，它是半径为$\sqrt{6}$、圆心为（-4，0）的圆．

十一划

常数（constant）：固定的数，例如 3 或$\sqrt{2}$．与它相对的就是变量，顾名思义，变量并不是只有一个值．在英文里，constant 也是固定不变、始终不渝的意思，譬如当你向别人夸称："我的另一半是我的 constant supporter．"意思就是说，即使他（她）明明知道，你在干军火买卖、逃漏税这些不法勾当，甚至你决定"出柜"承认自己是同志，他（或她）都会支持你到底．

笛卡儿坐标（Cartesian coordinates）：即平面上的标准坐标——你应该对它不陌生才对，就是有 x 轴与 y 轴，而且每一点都可以用两个具体的数来表示，譬如（7，4），就表示该点的位置是在顺着 x 轴方向走 7 单位，然后沿 y 轴方向走 4 单位．既然叫做"笛卡儿"，为什么它的英文名字不是 Descartesian，而是 Cartesian 呢？原来，在笛卡儿的那个年代，学者都用拉丁文写论文，而笛卡儿的拉丁文名字就是：Cartesius．

笛卡儿平面（Cartesian plane）：笛卡儿坐标所在的平面．从英文来看，也可以解释成：Cartesia 小国的空军势力范围．

被积函数（integrand）：积分式子里那个将要被积分的函数，也就是夹在

积分符号 $\int$ 和 dx 中间的部分.

速率（speed）：速度的绝对值. 譬如你把车撞坏了，事后你究竟是该告诉保险公司，你的车子以每小时 30 英里的速率撞上一堵墙（速度是每小时−30 英里），还是你是以同样的速率倒车时撞上的（速度是每小时−30 英里）.

速度（velocity）：位置的变化率（跟速率不同的是，如果你是沿着数轴朝左方运动，速度可以是负值）. 取位置函数的导数之后就可求得速度.

连续性（continuity）：就是没发生什么了不起的惊喜之事，一切进行如常. 在数学里，它的专业定义是：如果

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),$$

我们说函数 $f(x)$ 在点 a 为连续的. 再进一步，如果某函数在每一个有定义的点上都是连续的，我们才说该函数为连续的函数. 比较不那么专业的定义则是：如果你能够把函数曲线一笔画到底，笔尖都没有离开纸面，那么该函数就是处处连续的.（那坐标轴怎么办？好吧，准许你提起笔去画，笔尖离开多久都随你高兴.）欲知有关详情，请看第 9 章.

十二划

割线（secant line）：用来指称连接曲线上两点的一直线的行话. 先取一条曲线，任何曲线都成，然后在曲线上任选两点，再画条直线把它们连接起来，你就得到了一条割线！为什么不简单叫它直线就好了？这可是有历史渊源的. 在许多时候，我们在提及切线时，才会提到割线，因为在你要找出曲线上一点的切线时，你是把该点当作固定点 a，然后取曲线上另一点 b，以及通过 a、b 两点的直线，接着移动 b，让它逐渐挪近 a，因而你也得到了一系列连接 a、b 的割线，这些割线会趋近所谓的切线. 由于切线这名称取得很独特、很吓人，让数学家为割线抱屈，于是也给它取了这么一个独特又吓人的名字.

无理数（irrational number）：即非有理实数，也就是说该数无法写成由两个整数构成的分数. 典型的无理数有 π，e，$\sqrt{2}$ 等等. 每一个无理数写成小数

时，都是非循环小数．实际上，无理数非常多，比有理数还要多（数学家宣称无理数的数目多到根本数不清）．当然，你也有极充分的理由提出说，有理数本身就已经有无限多个了，那怎么可能有数目比有理数更多的其他东西呢？这个很玄的问题，会把我们扯进一个关于“无限”的议题，不过那是个完全不同的主题，现在若拿来谈论，会太离题——这倒是拿去问教授的好问题．

绝对极大值（absolute maximum; global maximum）：函数在特定的定义域内惟一、独一无二、绝无仅有的最大函数值．（这个值虽然惟一，却不限于一处，就像你看到两座高度完全相同的高山．）不要把它跟局部极大值（local maximum）搞混了；局部极大值跟绝对极大值的差异，就好比县市的警察局长跟号令全国的司法部．切记，绝对极大值也可能发生在区间的端点．绝对极大值有时也称“最大值”．

绝对极小值（absolute minimum）：定义跟绝对极大值一样，只是把其中的“大”字全部改成“小”字，而把“警察局长”换成“户长”，“司法部长”换成“副总统”（视国家的政治制度而定）．在函数图像上，绝对极小值就是整条曲线上位置最低的那个点．

绝对值（absolute value）：如果有负号，就把它拿掉；如果没有，就别动．

阶乘（factorial）：$n!=n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2\times1$，整数 n 的阶乘，就是从 1 到 n 的所有整数的乘积．这儿有个可以拿去难倒教授的问题：“像$\frac{3}{2}$或-2这类数字的阶乘该如何取？”

极限（limit）：不许你逾越的那条界限，就好比餐馆里的告示所说的：“取用沙拉请适量，每个人限取 3 次”．在微积分里，当你把许多愈来愈靠近某个数的值，代入一个函数值，所得到的函数值趋近的那个数，就是极限．

极大值（maximum，**复数为** maxima）：原文源于拉丁文，谁说拉丁文已死？

它们只是在休息罢了．关于极大值，详见“局部极大值”跟“绝对极大值”．

极小值（minimum，**复数为** minima）：嘿！我们刚解释了极大值，你难道不能举一反三吗？

极值（extremum，**复数为** extrema）：即极大值或极小值；这么说吧，具有最高或最低的极值的点，就是极大值或极小值．

十三划

微分（differential）：differential（差动齿轮）这个字有时与汽车的变速箱或传动装置相提并论，我们只知道它是重要零件，至于要去了解它的作用，就太困难了．对了！变量的微小变化量也叫做 differential，中译为“微分”，譬如说，$\mathrm{d}y$ 就是变量 y 的微小变化量．虽然 $\mathrm{d}y$ 通常是导数符号的一部分，也是积分符号的一部分，但是我们最好就只把它看成是变量 y 的极微小变化量．

微分方程（differential equation）：包含有导数的方程式．例如

$$6\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y-x=25.$$

这类方程式统治着大部分的物理世界，所以我们要尊重它们！

微积分基本定理（Fundamental Theorem of Calculus）：这个定理一般都分成两个部分来叙述．其中一部分是说，我们可以先取函数的反导函数，然后把上限与下限分别代入，就能求出函数曲线下方所围的面积；写成数学式就是：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a),$$

其中的 $F(x)$ 是任意函数，其导数为 $f(x)$，亦即 $F'(x)=f(x)$．所以上式也可写成：

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

换言之，如果你把一函数的导数从 a 积分到 b，你得到的就正好等于原函数在 b 的函数值，减去原函数在 a 的函数值．

另一部分则是说：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x).$$

这两个部分都说明，导数跟积分之间关系极为密切，要是没有这个定理，微积分的课程内容恐怕只剩下现有的一半而已.

十四划

图像（graph）：在 xy 平面上，在 y 方向上描绘出 $f(x)$所成的图示. 俗语说得好，百闻不如一见，一幅图可以诉说千言，一幅函数图像可以显示无穷多个函数值.

简单地说，$f(x)$的函数图像就是在笛卡儿平面上、所有满足方程式 $y=f(x)$的点(x, y)所成的集合. 最重要的性质是，x 轴的任何一条垂线与此图像最多仅相交于一点，因为在笛卡儿平面上，特定一个 x 值就定义一条 x 轴的垂线. 对特定一个 x 值，仅有一个 y 值使得 $y=f(x)$.

实数（real number）：我们经常打交道的数，包括整数、分数以及夹在分数之间的无理数，如 e、$\sqrt{2}$等等. 每一个实数都有它自己的小数表示法. 不同于实数的，是为虚数（imaginary number），虚数会牵涉到$\sqrt{-1}$.

对数（logarithm）：一种数学函数，是 b^x 的反函数，其中的 b 是某个定值，称为对数的底数.

渐近线（asymptote）：所谓渐近线，就像你在聚会上遇到了一个非常吸引你的人，你情不自禁想靠过去，设法走到他（她）的身旁，找话题搭讪. 结果你们聊得很愉快，你也愈来愈近，近到膝盖几乎相碰在一起. 在微积分上，你只是一直继续靠近. 而在现实生活中，你开始搭讪，向他（她）倾诉你对部分分式如何如何着迷，结果对方借口说要去拿杯饮料，不久后你就看见窗外有辆汽车扬长而去.

函数曲线的渐近线，就是躺在 xy 平面上，而函数曲线会与之愈来愈近的一条线. 有些函数会在渐近线的两侧穿过来、穿过去，不过幅度愈来愈小，也

算是跟渐近线愈来愈近.

碳定年法（carbon dating）：地质学家最主要的社交活动. 平日他们聚在一起，把一些采来的石块敲碎，然后检测石块里不同碳放射性核素的量. 原因是碳 12 不会随着时间而衰变，但是碳 14 会衰变，因此他们能从碳 12 跟碳 14 的比率得知这石块的年代. 这个地质学术语怎么跑到微积分书里来呢？那是因为碳 14 的衰变率，就跟所有的放射性物质一样，呈指数变化，意思就是说，在时刻 t 的残留量等于 $f(t)=C_0e^{-kt}$. 这是许多例题、习题跟考题的绝佳素材.

十五划

线性方程式（linear equation）：代表一条直线的方程式，样子就像 $3x+2y=4$，里面没有 x^2、$\sin x$ 甚至 xy. 无论以什么面目出现，都可以改写成下列的一般形式：$Ax+By+C=0$，其中的 A、B、C 均为常数（可能是 0）. 请注意，在直线的定义中提到的两种形式，都可以改写成这个形式.

复数（complex number）：忘了“变真实”、目前正在接受治疗的数；还有那些半真半假、长得像 $7+6i$（其中 $i=\sqrt{-1}$）的数. 我们知道，每个数学老师都告诉过你，负数没法开方，但实际上他们的意思是，你不能希望在拿负数开方之后得到一个实数. 换句话说，负数可以开方，只是你得到的是复数. 一般复数都以 $a+bi$ 的形式表示，其中的 a 叫做实部，bi 叫做虚部. 通常第一学期的微积分课程里不谈复数.

十六划

幂法则（power rule）：“power”这个英文字一般是指权力，所以“权力法则”就是：权力败坏人品，绝对的权力更彻底败坏人品（根据定义，当权力为正，绝对极力就等于权力；若为负，则绝对权力等于负的权力）. 用在微积分上，幂法则就是：x^n 的导数等于 nx^{n-1}.

整数（integer）：…，−3，−2，−1，0，1，2，3，…这个定义够短了吧！

导数（derivative）：注意！这是整个微积分里面最重要的观念．对于这个术语，你不应该只是随便去找本字典，像你平日查“药剂师”这个词那样，大略查出定义就算了，而是应该仔细读一读这本书（第 10、11、12 章）．如果你坚持要知道一个没啥价值的简单定义，那么我们可以告诉你，函数 $f(x)$的导数就是 $f(x)$的变化率；从几何来看，导数就代表函数 $y=f(x)$的图像在点$(x, f(x))$的切线的斜率．

椭圆（ellipse）：踩上一个圆，让它哎哟一声，然后你就会得到一个椭圆．椭圆要比圆长一些，或是宽一些．椭圆的一般式与圆的方程式类似，只是多了 a 和 b：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

十七划

临界点（critical point）：正当你分神不注意听讲的时候，老师所讲到的点．在数学上则是指：当函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$等于 0 或不存在时的 x 值．你会在两种场合遇到它：一、画函数图像时；二、求极大、极小值的应用题时．在前者，临界点告诉你图像上什么地点会出现严重变化；在后者，临界点指出所有有可能是极大值和极小值的点．

十八划

链式法则（chain rule）：“绝不要让自己被身上满是黥墨的人给拴住．”这条金科玉律的数学版则是说：

$$f(g(x))'=f'(g(x))g'(x)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

双曲函数（hyperbolic function）：提及这个名词，就表示你上的微积分课程稍微难一点、高深一点．这个主题讲解起来劳神又费时，所以大多数的微积分老师干脆跳过不谈．如果你的课堂里仍然包含了这个主题，也不用紧张，因为

这一类的函数一点也不难对付.

所谓 x 的双曲正弦函数，表示成 sinh x（发音与 cinch 一字相同），定义就是 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$；而双曲余弦函数，则表示成 cosh x（发音跟 posh 一字押韵），其定义为 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. 需要注意的是，它们俩互为对方的导数. 至于其他的双曲函数，可根据以上所定义的这个函数推知，就像用正弦和余弦来定义其他的三角函数一样.

二十三划

变化率（rate of change）：即函数正在变化的速率. 如果该函数是在度量你的位置，那么你的速率（车上的车速表会告诉你）就是变化率. 函数变化率的另一个说法是“导数”.

变量（variable）：神经紧张的气象学家使用得最频繁的一个词. 在数学上，它指能够变化的量，通常以 x、y 等字母表示，意思就是它没有特定的定值，而是能代表所有不同的值.